

第二视角

中值定理与证明题

从题干的符号出发，沿着圈画、颜色和箭头，看到下一行为什么这样写。

蓝：条件与对应 绿：导数与符号 红：目标与限制 紫：选路与构造

本辑重写当前专题的32项核心方法，并加入三点共线、积分平均函数单调性，共34项。这里按方法组织；相关年份原题通过每项末尾链接保留，不把题源条数当作逐题重写数量。

01 固定点存在与唯一：介值加罗尔	02 乘积导数构造中值辅助函数
03 2024 数三20：从绝对值误差界到完整证明	04 积分条件构造三个零点
05 凸性、切线与割线斜率的不等式	06 指数因子与商函数的中值构造
07 柯西中值定理与导数比控制差商	08 围绕内点展开端点：导数界与最佳位置
09 积分正交条件：为什么至少有两个不同零点	10 等端点的非恒常函数：正负导数分别构造
11 二阶导数比值：先排除分母零点，再构造乘积差	12 固定长度增量的单调性与次可加不等式
13 导数乘积差的符号：转为商函数比较	14 中间交点把两段割线斜率变成倒数
15 相同内部最大值：怎样造第三零点，再用两层三次罗尔	16 加权平均等于端点值：先介值后罗尔
17 有限开区间上导数有界推出函数有界	18 端点导数异号保证内部最大值，不保证函数零点
19 对数不等式：交叉相乘、无量纲换元和导数下界	20 唯一实根：导数正证明唯一，介值证明存在
21 递增凸函数的切线与零点之间的位置	22 两端泰勒相加相减与内部高阶导数点
23 两个中值定理点的导数比：公共割线差消去	24 增量与微分比较：两侧中值点和乘数符号
25 只有开区间可导：在内部闭区间应用中值定理	26 函数零点与导数零点相乘：制造两个不同的二阶组合零点
27 积分平均值制造罗尔定理端点	28 零端点最大高度：两侧割线与严格积分界
29 积分中点不等式与二阶导数：双向证明	30 积分大于弦下基准：内点极值与负二阶导
31 固定权重总量：单调函数的左右端区间界	32 累计积分次序：分部后权函数反转不等号
33 三点共线：等斜率路线与减端点连线路线	34 积分平均函数的单调性：分子构造与直接积分比较

01 固定点存在与唯一：介值加罗尔

f 在 $[0, 1]$ 连续、 $(0, 1)$ 可导； $0 < f(x) < 1$, $f'(x) \neq 1$ 。

存在唯一 $\xi \in (0, 1)$: $f(\xi) = \xi$

① 读题：等号两边有同一个自变量

$$\boxed{f(\xi) = \xi} \xrightarrow{\text{移项}} f(\xi) - \xi = 0$$

$$\boxed{0 < f(0)}, \quad \boxed{f(1) < 1}$$

先把“交点”改成“零点”；存在和唯一分开做。

② 选定理：存在看异号，唯一看反证

$$F(0)F(1) < 0 \xrightarrow{\text{介值}} \text{至少一个零点}$$

$$F(\xi) = F(\eta) = 0 \xrightarrow{\text{罗尔}} F'(c) = 0$$

罗尔本身不制造第一个零点。拉格朗日也能排除两根，但罗尔直接对应两个零值。

01 固定点存在与唯一：介值加罗尔 · 续

③ 辅助函数来自目标的移项

$$F(x) = f(x) - x$$

$$F(0) = f(0) > 0, \quad F(1) = f(1) - 1 < 0$$

$$F'(x) = f'(x) - 1 \neq 0$$

减去 x ：同时把目标化零，把题给 $f' \neq 1$ 化成 $F' \neq 0$ 。

④ 存在性的完整证明

F 在 $[0, 1]$ 连续，端点严格异号。

$$\exists \xi \in (0, 1) : \quad F(\xi) = 0$$

↓ 代回定义

$$f(\xi) - \xi = 0 \implies f(\xi) = \xi$$

01 固定点存在与唯一：介值加罗尔 · 续

⑤ 唯一性的完整证明

反设还有另一根 η ；交换名字后可令 $\xi < \eta$ 。

$$0 < \xi < \eta < 1, \quad F(\xi) = F(\eta) = 0$$

F 在 $[\xi, \eta]$ 连续，在 (ξ, η) 可导；罗尔给出

$$\exists c \in (\xi, \eta) : \quad 0 = F'(\eta) - F'(\xi) = f'(\eta) - f'(\xi)$$

$$f'(\eta) = 1 \quad \text{与题设矛盾}$$

⑥ 为什么不直接说 f 单调？

$$f'(x) \neq 1 \quad \not\Rightarrow \quad f'(x) > 0$$

它限制的是导数与 1 的关系，不是与 0 的关系。

$$\underbrace{f'(\eta) - 1}_{F'(\eta)} \neq 0 \quad \text{已经足够排除 } F \text{ 的两个零点}$$

不必额外假设导数连续，也不必先讨论 f 的单调性。

01 固定点存在与唯一：介值加罗尔 · 续

⑦ 边界条件改变时，哪一步失效？

$$0 \leq f(x) \leq 1 \implies F(0) \geq 0, F(1) \leq 0$$

这只保证闭区间内的固定点，可能落在端点。

$$f(x) = 0 : \quad f'(x) \neq 1, \quad f(x) = x \iff x = 0$$

⑧ 下一次遇到交点：先写这一行

$$f(\xi) = g(\xi) \implies F = f - g$$

$$\text{存在：看 } F(a), F(b); \quad \text{唯一：看 } F' = f' - g'$$

再检查区间连续性、开区间可导性；不能仅凭移项就宣称交点存在。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 3 条题源

02 乘积导数构造中值辅助函数

$a < b$, f 在 $[a, b]$ 连续 且在 (a, b) 可导。

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

① 读题：端点乘积与导数两项互相对应

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

↓ 右边识别乘积求导，左边核对端点

$$[xf(x)]' = 1 \cdot f(x) + xf'(x)$$

② 选定理：差商等于一个导数

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi) \quad \text{拉格朗日}$$

罗尔也可用，但须先减一次项使端点相等；柯西取第二函数 x 就退回拉格朗日。

只给一阶可导，不用额外二阶条件或泰勒展开。

02 乘积导数构造中值辅助函数 · 续

③ 辅助函数怎样确定

$$u = x, \quad v = f(x), \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$F(x) = xf(x), \quad F'(x) = f(x) + xf'(x)$$

$$F(b) - F(a) = bf(b) - af(a)$$

导数与端点同时匹配，构造才算完成。

④ 完整证明：一次定理产生同一个点

F 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 可导。

$$\exists \xi \in (a, b) : \quad F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

$$bf(b) - af(a) = [f(\xi) + \xi f'(\xi)](b - a)$$

↓ $b-a>0$ ，两边同除

$$\boxed{\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)}$$

02 乘积导数构造中值辅助函数 · 续

⑤ 罗尔路线：常数不是猜的

$$G(x) = xf(x) - Cx$$

$$G(a) = G(b) \iff af(a) - Ca = bf(b) - Cb$$

$$C(b-a) = bf(b) - af(a)$$

$$C = \frac{bf(b) - af(a)}{b-a}$$

⑥ 罗尔路线的完整收尾

取上式 C ， G 连续、开区间可导，且 $G(a)=G(b)$ 。

$$\exists \xi \in (a, b): \quad G'(\xi) = 0$$

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) - C = 0$$

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) = \frac{bf(b) - af(a)}{b-a}$$

02 乘积导数构造中值辅助函数 · 续

⑦ 别把两个不同的中值点拼成一个

$$f(x) = x^2, \quad [a, b] = [0, 1]$$

对 f 用拉格朗日: $1 = 2\xi \implies \xi = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \neq 1$$

对 $xf(x) = x^3$: $1 = 3\xi^2 \implies \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

⑧ 变式：两项中看见 x^2 和 $2x$

$$2xf(x) + x^2f'(x) = [x^2f(x)]'$$

设 $F=x^2f$, 正则性不变; 拉格朗日给

$$\exists \xi \in (a, b): \frac{b^2f(b) - a^2f(a)}{b - a} = 2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi)$$

记住乘积法则的两项对应, 不必记一张辅助函数表。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 1 条题源

03 2024 数三20：从绝对值误差界到完整证明

f 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$ 。第一问证明任意 $0 < x < 1$ 的点值界；第二问证明积分界。

$$|f(x) - (1-x)f(0) - xf(1)| \leq \frac{x(1-x)}{2}$$

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$$

① 读题：绝对值、内部组合、右边分别触发什么

$$|f(x) - (1-x)f(0) - xf(1)| \leq \frac{x(1-x)}{2}$$

↓ 绝对值 → 同时控制上界与下界

$$-\frac{x(1-x)}{2} \leq f(x) - (1-x)f(0) - xf(1) \leq \frac{x(1-x)}{2}$$

$$(1-x)f(0) + xf(1)$$

↓ 代入两端 → 这正是连接端点的直线

$$x=0: f(0); \quad x=1: f(1)$$

$$\frac{x(1-x)}{2}: \quad x=0, 1 \text{ 时为零}$$

$$\left[\frac{x(1-x)}{2} \right]'' = -1, \quad (-1 \leq f'' \leq 1)$$

左边减直线不改变二阶导数；右边二次项的二阶导数正好是常数。两条线索在这里接上。

03 2024 数三20：从绝对值误差界到完整证明 · 续

② 选定理：先看目标要哪一阶、哪一种关系

$$\text{罗尔: } G(0) = G(x) = G(1) = 0$$

$$\Downarrow \quad G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = 0 \quad \Downarrow \quad G''(\xi) = 0$$

主线选它：目标有二阶导数界，可以补二次项造第三个零点。

$$\text{拉格朗日: } \frac{G(x) - G(0)}{x} = G'(\xi_1)$$

$$\frac{G(1) - G(x)}{1 - x} = G'(\xi_2), \quad \xi_1 < x < \xi_2$$

也能走：先让 G'' 有固定符号，再比较这两个一阶导数；第⑦页完成。

$$\text{柯西的一般形式: } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

它适合两个增量之比；本题没有现成的第二个增量。右边有分母 2，不等于需要柯西。

$$\text{泰勒: } f(0), f(1) \rightarrow f(x), f'(x), f''(\eta)$$

可行：用两个权重消去 $f'(x)$ ，第⑧页完成。闭区间连续、内部二阶可导足以支持以上主线。

03 2024 数三20：从绝对值误差界到完整证明 · 续

③ 第一个辅助函数：端点连线如何算出来

过 $(0, f(0)), (1, f(1))$ 的直线： $At + B$

↓ 把两个端点分别代入，解两个系数

$$B = f(0), \quad A + B = f(1)$$

$$A = f(1) - f(0)$$

$$At + B = tf(1) + (1 - t)f(0)$$

↓ 从 f 减去这条直线：端点误差同时归零

$$F(t) = f(t) - (1 - t)f(0) - tf(1)$$

$$F(0) = f(0) - f(0) = 0, \quad F(1) = f(1) - f(1) = 0$$

$$F'(t) = f'(t) + f(0) - f(1), \quad F''(t) = f''(t)$$

目标变成： $|F(x)| \leq \frac{x(1-x)}{2}$

x 是本次想估计的固定点； t 是辅助函数的自变量。后面求导都对 t 求。A、B 解完即退场。

03 2024 数三20：从绝对值误差界到完整证明 · 续

④ 第二个辅助函数：补什么、系数怎样定

$$F(0) = F(1) = 0 \quad \text{只有两个零点}$$

想得到二阶导数零点 $\longrightarrow$ 还缺一个零点 x

↓ 补项既要保留 0、1，又要能调节 x 处的值

$$t = 0, 1 \text{ 都为零} \implies t(t-1)$$

$$G(t) = F(t) - Ct(t-1)$$

$$G(x) = 0 \iff F(x) - Cx(x-1) = 0$$

$$0 < x < 1 \implies x(x-1) \neq 0$$

$$C = \frac{F(x)}{x(x-1)}$$

$$G(0) = G(x) = G(1) = 0$$

$$[t(t-1)]' = 2t-1, \quad [t(t-1)]'' = 2$$

$$G''(t) = f''(t) - 2C$$

C 虽由固定的 x 决定，但对 t 求导时是常数。目标中的 $1/2$ 将由 $2C=f''(\xi)$ 得到。

03 2024 数三20：从绝对值误差界到完整证明 · 续

⑤ 第一问完整证明：两层，实际用三次罗尔

固定任意 $x \in (0, 1)$ ，取前两页的 F 、 G 、 C 。 G 在 $[0, 1]$ 连续、内部二阶可导。

$$[0, x] : G(0) = G(x) = 0$$

$$\implies \exists \xi_1 \in (0, x) : G'(\xi_1) = 0$$

$$[x, 1] : G(x) = G(1) = 0$$

$$\implies \exists \xi_2 \in (x, 1) : G'(\xi_2) = 0$$

G' 在内部可导，因而在 $[\xi_1, \xi_2]$ 连续；在这个新区间第三次用罗尔。

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) : 0 = G''(\xi) = f''(\xi) - 2C$$

$$C = \frac{1}{2}f''(\xi), \quad F(x) = Cx(x-1) = \frac{1}{2}f''(\xi)x(x-1)$$

$$|x(x-1)| = x(1-x), \quad |f''(\xi)| \leq 1$$

$$\boxed{|f(x) - (1-x)f(0) - xf(1)| \leq \frac{x(1-x)}{2}}$$

x 任意，因此每个内点都成立；若把结论延伸到 0、1，两边都为 0。不同 x 对应的 ξ 可以不同。

03 2024 数三20：从绝对值误差界到完整证明 · 续

⑥ 第二问完整证明：把第一问的界积起来

$$\int_0^1 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

↓ 端点函数值对积分变量 x 是常数

$$\int_0^1 [(1-x)f(0) + xf(1)] dx = \frac{f(0) + f(1)}{2}$$

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} = \int_0^1 F(x) dx$$

↓ 先用积分绝对值不等式，再用第一问逐点界

$$\left| \int_0^1 F(x) dx \right| \leq \int_0^1 |F(x)| dx \leq \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12}$$

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$$

直接积分点值界即可；不需要把中值点 ξ 当成 x 的可导函数，更不能把 $f''(\xi)$ 擅自提出积分。

03 2024 数三20：从绝对值误差界到完整证明 · 续

⑦ 另一个入口：绝对值拆上下界，用拉格朗日比较

仍用 $F=f$ -端点连线；以下重新定义 G 。先证明上界。

$$G(t) = F(t) - \frac{t(1-t)}{2}, \quad G(0) = G(1) = 0$$

$$G''(t) = f''(t) + 1 \geq 0 \implies G' \text{ 不减}$$

最后一步由对 G' 使用拉格朗日得到。再在 $[0, x]$ 、 $[x, 1]$ 各用拉格朗日：

$$\frac{G(x)}{x} = G'(\xi_1) \leq G'(\xi_2) = \frac{-G(x)}{1-x}$$

$$0 < \xi_1 < x < \xi_2 < 1$$

↓ 乘正数 $x(1-x)$ ，移项合并

$$(1-x)G(x) \leq -xG(x) \implies G(x) \leq 0$$

$$F(x) \leq \frac{x(1-x)}{2}$$

下界：重新取 $G(t)=F(t)+t(1-t)/2$ ，则 $G(0)=G(1)=0$ ， $G''=f''-1 \leq 0$ ， G' 不增。

$$\frac{G(x)}{x} \geq \frac{-G(x)}{1-x} \implies G(x) \geq 0$$

$$F(x) \geq -\frac{x(1-x)}{2} \implies \boxed{|F(x)| \leq \frac{x(1-x)}{2}}$$

03 2024 数三20：从绝对值误差界到完整证明 · 续

⑧ 泰勒如何消项；导数端点相等还能想到什么

$$f(0) = f(x) - xf'(x) + \frac{x^2}{2}f''(\eta_1), \quad 0 < \eta_1 < x$$

$$f(1) = f(x) + (1-x)f'(x) + \frac{(1-x)^2}{2}f''(\eta_2), \quad x < \eta_2 < 1$$

↓ 分别乘 $1-x$ 、 x ，再相加

$$-x(1-x) + x(1-x) = 0 \quad \text{消掉 } f'(x)$$

$$\begin{aligned} & (1-x)f(0) + xf(1) - f(x) \\ &= \frac{x(1-x)}{2} [xf''(\eta_1) + (1-x)f''(\eta_2)] \end{aligned}$$

$$|F(x)| \leq \frac{x(1-x)}{2} [x|f''(\eta_1)| + (1-x)|f''(\eta_2)|]$$

$$\leq \frac{x(1-x)}{2} [x + (1-x)] = \frac{x(1-x)}{2}$$

题设闭区间二阶可导保证 f' 连续，导数端点相等还可单独触发罗尔：

$$f'(0) = f'(1) \implies \exists \eta \in (0, 1) : f''(\eta) = 0$$

但这个存在性结论不能代替“每个 x 的误差界”。以上两问都没有用到端点导数相等。

$$|f''| \leq M \implies |F(x)| \leq \frac{M}{2}x(1-x), \quad \left| \int_0^1 F \right| \leq \frac{M}{12}$$

打开题源对照

► 对照原解析 · 6 条题源

04 积分条件构造三个零点

f 在 $[-1, 1]$ 连续, 在 $(-1, 1)$ 可导且严格递增; $\int_{-1}^1 f(t) dt = 0$, $a = \int_0^1 f(t) dt$ 。

$$\exists \xi \in (-1, 1) : f'(\xi) = 2 \int_0^1 f(t) dt$$

① 读题：积分为零给两个端点，小积分给中点

$$\left(\int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \right), \quad \left(a = \int_0^1 f(t) dt \right)$$

目标： $\exists \xi \in (-1, 1), f'(\xi) = 2a$

↓ 导数等于常数，先移项认成二阶导数

$$f'(\xi) - 2a = 0$$

② 先证明 $a > 0$ ：严格递增怎样用

$$\int_{-1}^0 f(t) dt = -a$$

$$2a = \int_0^1 f(t) dt - \int_{-1}^0 f(t) dt$$

$$t = -u : \int_{-1}^0 f(t) dt = \int_0^1 f(-u) du$$

$$2a = \int_0^1 [f(t) - f(-t)] dt > 0$$

$t > 0$ 时 $t > -t$ ，严格递增给被积差严格为正；不是由严格递增推 f' 处处 > 0 。

04 积分条件构造三个零点 · 续

③ 选定理：积分先升一阶，再用两层罗尔

$$\left(\int_1^x f(t) dt\right)' = f(x), \quad \left(\int_1^x f(t) dt\right)'' = f'(x)$$

$$(Ax^2 + Bx + C)'' = 2A$$

需要二阶导数变成 $f' - 2a$ ，先令 $A = -a$ ；再由端点条件定 B 、 C 。

④ 辅助函数的三个系数怎样算

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt - ax^2 + Bx + C$$

$$F(1) = 0 \implies -a + B + C = 0$$

$$F(-1) = 0 \implies -a - B + C = 0$$

$$B = 0, C = a \implies F(x) = a(1 - x^2) + \int_1^x f(t) dt$$

$$F(0) = a - \int_0^1 f(t) dt = 0$$

04 积分条件构造三个零点 · 续

⑤ 第一层：在左右两段分别用罗尔

f 连续且可导， F 在闭区间连续、内部二阶可导。

$$F(-1) = F(0) = F(1) = 0$$

$$\exists \xi_1 \in (-1, 0) : F'(\xi_1) = 0$$

$$\exists \xi_2 \in (0, 1) : F'(\xi_2) = 0$$

$$\xi_1 < 0 < \xi_2$$

⑥ 第二层：同一个常数 $2a$ 出现

F' 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 连续、内部可导，且两端同为零。

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) : F''(\xi) = 0$$

$$F'(x) = -2ax + f(x), \quad F''(x) = -2a + f'(x)$$

$$\boxed{f'(\xi) = 2a}, \quad -1 < \xi < 1$$

04 积分条件构造三个零点 · 续

⑦ 换一种看法：也可先找两条斜率

$$F(-1) = F(0) = F(1) = 0 \implies \frac{F(0) - F(-1)}{1} = \frac{F(1) - F(0)}{1} = 0$$

对两段使用拉格朗日，得到同样的两个 F' 零点；再对 F' 用罗尔。

这里拉格朗日的斜率恰好为零，所以直接称罗尔更短。

⑧ 验算与迁移

$$f(x) = x : \quad a = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}, \quad f'(x) = 1 = 2a$$

$$f(x) = x^3 : \quad a = \frac{1}{4}, \quad 3\xi^2 = \frac{1}{2} \implies \xi = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

看到积分条件、目标含 f' ：尝试变上限积分；再由目标常数的导数阶数决定补一次还是二次项。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 2 条题源

05 凸性、切线与割线斜率的不等式

f 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导且 f' 单调不减; 公式中的端点导数另假设 $f'_+(a), f'_-(b)$ 存在且有限。末尾整数采样例另要求 f 在 $[1, +\infty)$ 有二阶导数且 $f'' > 0$ 。严格割线条件指每个 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ 都满足相邻割线斜率严格递增; 此分支只需 f 在 (a, b) 可导。固定右端点割线分支只要求凸性 (图形在弦线下方), 不要求可导。

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

① 读题: 导数不减怎样传递到割线

$$f' \text{ 不减}, \quad a < x < b$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{与} \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

两段区间左右分离, 中值点的位置才可以比较。

② 选定理: 斜率用拉格朗日, 值的界再移项

$$\exists \xi_1 \in (a, x): \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_1)$$

$$\exists \xi_2 \in (x, b): \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(\xi_2)$$

$$\xi_1 < \xi_2 \implies f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$$

f 闭区间连续、内部可导, 两个子区间都满足拉格朗日条件。

05 凸性、切线与割线斜率的不等式 · 续

③ 割线不等式怎样变成弦线不等式

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

↓ 两个分母均为正，交叉相乘不变号

$$(b - x)[f(x) - f(a)] \leq (x - a)[f(b) - f(x)]$$

$$(b - a)f(x) \leq (b - x)f(a) + (x - a)f(b)$$

$$f(x) \leq \frac{b - x}{b - a}f(a) + \frac{x - a}{b - a}f(b)$$

④ 切线不等式：左右两边必须分别看符号

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

$$x > c: c < \xi < x, f'(\xi) \geq f'(c), x - c > 0$$

$$x < c: x < \xi < c, f'(\xi) \leq f'(c), x - c < 0$$

↓ 第二种情况乘负数，不等号反向

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$$

$$f = e^x, c = 0: e^x \geq 1 + x$$

05 凸性、切线与割线斜率的不等式 · 续

⑤ 端点导数夹住整段斜率

本分支另假设端点单侧导数存在且有限。

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

↓ 左边令 $x \rightarrow a^+$, 右边令 $x \rightarrow b^-$

$$f'_+(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_-(b)$$

不可把端点导数存在当成“内部可导”自动附送的条件。

⑥ 整数采样：为什么相邻增量越来越大

本分支 f 在 $[1, +\infty)$ 二阶可导且 $f'' > 0$ 。

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n), \quad n < \xi_n < n+1$$

$$\xi_n < n+1 < \xi_{n+1} \implies f'(\xi_n) < f'(\xi_{n+1})$$

$$f(2) > f(1) \implies f(n) \geq f(1) + (n-1)[f(2) - f(1)] \rightarrow +\infty$$

最后是把 $n-1$ 个增量逐项下界相加。

05 凸性、切线与割线斜率的不等式 · 续

⑦ 严格割线条件为什么迫使 f' 严格递增

$$u < t < v : \quad \frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \frac{t - u}{v - u} \frac{f(t) - f(u)}{t - u} + \frac{v - t}{v - u} \frac{f(v) - f(t)}{v - t}$$

两项严格有序，正权平均位于它们之间；令 t 趋向端点可得 f' 不减。

$$f'(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'(v)$$

$$f'(u) = f'(v) = C \implies f'(t) = C \quad (u < t < v)$$

$$f(t) = f(u) + C(t - u) \implies \text{内部相邻割线斜率都为 } C, \text{ 矛盾}$$

反向： f' 严格递增，对两个相邻区间用拉格朗日即得严格割线比较。

⑧ 固定一端的割线递增，不能反推全部凸性

$$-1 \leq u < v < 1 : \quad v = \frac{1 - v}{1 - u} u + \frac{v - u}{1 - u} \cdot 1$$

凸性代入此正权组合，移项再除以正的 $1 - v$ ，得到

$$\frac{f(v) - f(1)}{v - 1} \geq \frac{f(u) - f(1)}{u - 1}$$

$$f(x) = (x - 1)x^3 : \quad \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = x^3 \text{ 严格递增}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x \text{ 变号；故反向不成立}$$

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 31 条题源

06 指数因子与商函数的中值构造

f 在 $[a, b]$ 连续 且在 (a, b) 可导; λ 为实数。末两式另设 g 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $g(x) \neq 0$ 对所有 $x \in [a, b]$ 成立。

$$[e^{\lambda x} f(x)]' = e^{\lambda x} [f'(x) + \lambda f(x)]$$

① 读题: f' 加常数倍 f , 像哪个导数?

$$f'(x) + \lambda f(x)$$

$$[u(x)f(x)]' = u(x)f'(x) + u'(x)f(x)$$

↓ 希望两项系数之比为 λ

$$\frac{u'}{u} = \lambda \implies u = e^{\lambda x}$$

② 正因子有什么作用

$$F(x) = e^{\lambda x} f(x)$$

$$F'(x) = e^{\lambda x} [f'(x) + \lambda f(x)]$$

$$e^{\lambda x} > 0$$

乘它不会改变零点关系或不等号方向; 无需限制 λ 的正负。

06 指数因子与商函数的中值构造 · 续

③ 选罗尔还是拉格朗日，要再看端点

$$e^{\lambda a} f(a) = e^{\lambda b} f(b) \implies F(a) = F(b)$$

$$\text{端点相等} \rightarrow \text{罗尔} \rightarrow F'(\xi) = 0$$

$$F(b) - F(a) \neq 0 \rightarrow \text{拉格朗日给整段差商}$$

仅认出导数结构还不够，必须查新函数的端点关系。

④ 完整的零点证明

补充本分支条件：指数加权的端点值相等。F 闭区间连续、内部可导。

$$\exists \xi \in (a, b) : 0 = F'(\xi) = e^{\lambda \xi} [f'(\xi) + \lambda f(\xi)]$$

↓ 除以严格正的指数因子

$$\boxed{f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0}$$

06 指数因子与商函数的中值构造 · 续

⑤ 符号分支：不相等时也可以比较端点

$$f'(x) + \lambda f(x) \geq 0 \implies F'(x) \geq 0$$

对 F 在 $[a, b]$ 用拉格朗日。

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a) \geq 0$$

$$e^{\lambda b} f(b) \geq e^{\lambda a} f(a)$$

⑥ 乘积差结构为什么改成商函数

$$(f'g - fg') \longrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

另设 g 在闭区间连续、内部可导，且整个闭区间 $g \neq 0$ 。

$$G(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f(a)g(b) = f(b)g(a) \iff G(a) = G(b)$$

06 指数因子与商函数的中值构造 · 续

⑦ 商函数路线的完整证明

分母无零点，G 满足罗尔连续与可导条件。

$$\exists \eta \in (a, b) : 0 = G'(\eta) = \frac{f'(\eta)g(\eta) - f(\eta)g'(\eta)}{g(\eta)^2}$$

$$g(\eta)^2 > 0 \implies f'(\eta)g(\eta) - f(\eta)g'(\eta) = 0$$

若 g 有零点，这条商函数路线需要换构造，不能直接除。

⑧ 把隐藏因子写出来练一次

$$f' - 2f \longrightarrow [e^{-2x}f(x)]' = e^{-2x}(f' - 2f)$$

$$f' + f \longrightarrow [e^x f(x)]' = e^x(f' + f)$$

先认目标里 f 的系数，再确定指数；不要把所有“加一项”的式子都机械乘 e^x 。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 6 条题源

07 柯西中值定理与导数比控制差商

f, g 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导且 $g' \neq 0$, $a < b$ 。

$$\text{存在 } \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

① 读题：两个函数的增量必须成对出现

$$\boxed{f(b) - f(a)} \quad \text{与} \quad \boxed{g(b) - g(a)}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \longleftrightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

柯西的特点：两种增量对应同一个中值点。

② 比值形式之前，先排除零分母

$$g(b) = g(a) \xrightarrow{\text{罗尔}} \exists \eta \in (a, b) : g'(\eta) = 0$$

$$g' \neq 0 \implies g(b) - g(a) \neq 0$$

罗尔条件由 g 闭区间连续、内部可导保证。

07 柯西中值定理与导数比控制差商 · 续

③ 辅助函数的来源：交叉相乘并做端点差

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) - [g(b) - g(a)]f'(\xi) = 0$$

↓ 两个方括号都是常数；反向积分一阶导数

$$\begin{aligned} F(x) &= [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] \\ &\quad - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)] \end{aligned}$$

减去端点值，让左端自动归零。

④ 逐个检查新函数端点

$$F(a) = [f(b) - f(a)] \cdot 0 - [g(b) - g(a)] \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} F(b) &= [f(b) - f(a)][g(b) - g(a)] \\ &\quad - [g(b) - g(a)][f(b) - f(a)] = 0 \end{aligned}$$

两个乘积互换次序后完全相同，因此右端也为零。

07 柯西中值定理与导数比控制差商 · 续

⑤ 完整证明：罗尔产生交叉形式

F 闭区间连续、内部可导；在 $[a, b]$ 使用罗尔。

$$\exists \xi \in (a, b) : F'(\xi) = 0$$

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi)$$

↓ $g'(\xi) \neq 0$ 且 $g(b) - g(a) \neq 0$ ；两边同除

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}$$

⑥ 为什么拉格朗日是它的特例

$$g(x) = x \implies g(b) - g(a) = b - a, \quad g'(\xi) = 1$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

只出现区间长度时，用拉格朗日即可；第二种增量有自身结构时再考虑柯西。

07 柯西中值定理与导数比控制差商 · 续

⑦ 具体比较：对数差商怎样夹住

$$0 < a < b, \quad f(x) = \ln x, \quad g(x) = x$$

$$\ln b - \ln a = \frac{b-a}{\xi}, \quad a < \xi < b$$

↓ 正数取倒数，不等号反向

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$$

$$\boxed{\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}}$$

⑧ 不能分开用两次拉格朗日后直接合点

$$f(b) - f(a) = f'(\xi_1)(b-a), \quad g(b) - g(a) = g'(\xi_2)(b-a)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$$

这两点未必相同。目标要求同点比值时，用上述整体构造，而不是把下标擦掉。

打开题源对照

► 对照原解析 · 9 条题源

08 围绕内点展开端点：导数界与最佳位置

f 在 $[a, b]$ 连续，区间内二阶可导且 $|f''| \leq M$ ； $f(a) = f(b)$ ， $a < x < b$ 。求 $c \in (a, b)$ 。

$$|f'(x)| \leq \frac{M[(x-a)^2 + (b-x)^2]}{2(b-a)}$$

① 读题：等端点与二阶界，目标却是一阶导数

$$f(a) = f(b), \quad |f''| \leq M$$

目标含 $f'(x) \implies$ 以这个 x 为共同展开中心

x 是任意固定内点；不能只证明某个点的导数有界。

② 为什么一次罗尔不够

$$f(a) = f(b) \xrightarrow{\text{罗尔}} f'(\xi) = 0$$

这只给某个 ξ ，无法直接控制任意给定 x 。

两端泰勒 $\rightarrow$ 相减消 $f(x) \rightarrow$ 留下 $(b-a)f'(x)$

08 围绕内点展开端点：导数界与最佳位置 · 续

③ 把两个端点分别展开

$$f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \frac{(a-x)^2}{2}f''(\xi_1)$$

$$a < \xi_1 < x$$

$$f(b) = f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2}f''(\xi_2)$$

$$x < \xi_2 < b$$

f 在闭区间连续、内部二阶可导；展开中心为内点， f' 在其附近可导因而连续。

④ 为什么相减；每个系数算清楚

$$f(b) - f(a) = 0, \quad (b-x) - (a-x) = b-a$$

$$0 = (b-a)f'(x) + \frac{1}{2}[(b-x)^2f''(\xi_2) - (a-x)^2f''(\xi_1)]$$

$$2(b-a)f'(x) = (a-x)^2f''(\xi_1) - (b-x)^2f''(\xi_2)$$

08 围绕内点展开端点：导数界与最佳位置 · 续

⑤ 取绝对值并逐项用导数界

$$\begin{aligned} 2(b-a)|f'(x)| &\leq (a-x)^2|f''(\xi_1)| + (b-x)^2|f''(\xi_2)| \\ &\leq M[(x-a)^2 + (b-x)^2] \end{aligned}$$

↓ $2(b-a)>0$ ，除过去不改变方向

$$|f'(x)| \leq \frac{M[(x-a)^2 + (b-x)^2]}{2(b-a)}$$

⑥ 中点为什么是这条界的最佳位置

$$(x-a)^2 + (b-x)^2 = 2\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$x = \frac{a+b}{2} \implies |f'(x)| \leq \frac{M(b-a)}{4}$$

这里“最佳位置”指右边这个表达式在中点最小，不是任意位置都能套中点常数。

08 围绕内点展开端点：导数界与最佳位置 · 续

⑦ 零端点、驻点高度：再用两次泰勒

另设 $f(a)=f(b)=0$, $c \in (a, b)$ 且 $f'(c)=0$ 。

$$0 = f(c) + \frac{(a-c)^2}{2} f''(\eta_1)$$

$$0 = f(c) + \frac{(b-c)^2}{2} f''(\eta_2)$$

$$|f(c)| \leq \frac{M}{2} \min\{(c-a)^2, (b-c)^2\}$$

$$\min(c-a, b-c) \leq \frac{b-a}{2} \implies |f(c)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8}$$

⑧ 检查等号与量纲

$$f(x) = \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$$

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f'' = -M, \quad f'(\frac{a+b}{2}) = 0$$

$$f(\frac{a+b}{2}) = \frac{M(b-a)^2}{8}$$

高度界的区间长度是平方；导数界的区间长度是一次。两者不能混用。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 6 条题源

09 积分正交条件：为什么至少有两个不同零点

f 在 $[a, b]$ 连续, $a < b$, $f \not\equiv 0$, $\int_a^b f = \int_a^b xf = 0$ 。

f 在 (a, b) 至少有两个不同零点

① 读题：两个积分同时为零，可以相减出什么？

$$\left(\int_a^b f(x) dx = 0 \right), \quad \left(\int_a^b xf(x) dx = 0 \right)$$

$$\int_a^b (x - c)f(x) dx = 0 \quad \text{对任意常数 } c \text{ 都成立}$$

c 可以按反证中假设的零点位置来选；这是题设留出的可调因子。

② 先选介值，再用积分符号反证

题设只要求连续，没有可导条件；不能把罗尔当作默认路线。

$$\int f = 0, f \not\equiv 0 \rightarrow \text{既有正值又有负值} \rightarrow \text{至少一个零点}$$

若只有一个零点 $c \rightarrow (x - c)f(x)$ 同号 $\rightarrow$ 积分不为零

09 积分正交条件：为什么至少有两个不同零点 · 续

③ 为什么一定同时出现正值与负值

若 $f \geq 0$ 且不恒为零，某内点附近有严格正下界。

$$f(u) > 0 \implies \exists \delta > 0 : \quad f(x) \geq \frac{1}{2}f(u) > 0 \quad (|x - u| \leq \delta)$$

$$[u - \delta, u + \delta] \subset (a, b)$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \delta f(u) > 0 \quad \text{矛盾}$$

若只有负值同理。非零值若先出现在端点，连续性保证附近内点也非零。

$$\exists u, v \in (a, b) : \quad f(u) > 0 > f(v)$$

④ 第一个零点由介值定理给出

在 u, v 之间的闭区间上使用介值定理。

$$\exists c \in (\min(u, v), \max(u, v)) : \quad f(c) = 0$$

若已经有两个不同内点零点，结论完成；否则反设 c 是唯一内点零点。

$$f(x) \neq 0 \quad (x \in (a, c) \cup (c, b))$$

09 积分正交条件：为什么至少有两个不同零点 · 续

⑤ 唯一零点为什么意味着两侧各自定号

若同一侧出现正、负值，连续性会给这一侧另一个零点。

f 在 (a, c) 定号，在 (c, b) 定号

前面已知正、负值都存在，所以两侧符号必须相反。

x	(a, c)	(c, b)
$x - c$	—	+
$f(x)$ 的一种情形	—	+
$(x - c)f(x)$	+	+

⑥ 乘以 $x-c$ ，把变号抵消掉

若上表符号相反，乘积就在两侧都为负；两种情况分别处理即可。

$$(x - c)f(x) > 0 \ (a < x < b, x \neq c) \implies \int_a^b (x - c)f(x) dx > 0$$

$$(x - c)f(x) < 0 \ (a < x < b, x \neq c) \implies \int_a^b (x - c)f(x) dx < 0$$

连续、同号且不恒为零，保证积分严格非零。

09 积分正交条件：为什么至少有两个不同零点 · 续

⑦ 与题设相撞，完成反证

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-c)f(x) dx &= \int_a^b xf(x) dx - c \int_a^b f(x) dx \\ &= 0 - c \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

f 在 (a, b) 至少有两个不同零点

矛盾来自“假设只有一个”；没有把零点恰好等于二当成结论。

⑧ 少一个积分条件会怎样？

$$\begin{aligned}f(x) &= x - \frac{1}{2}, \quad [0, 1] \\ \int_0^1 f(x) dx &= 0, \quad f \text{ 仅有一个零点 } \frac{1}{2} \\ \int_0^1 xf(x) dx &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \neq 0\end{aligned}$$

第二个条件的作用正是控制乘上一次因子后的积分。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 3 条题源

10 等端点的非恒常函数：正负导数分别构造

$a < b$, f 在 $[a, b]$ 连续、在 (a, b) 可导, 不恒为常数且 $f(a) = f(b)$ 。中点分段分支允许恒常函数: F 在 $[0, 1]$ 连续、内部可导且 $F(0) = F(1)$ 。

$$\exists u, v \in (a, b) : \quad f'(u) > 0, \quad f'(v) < 0$$

① 读题：想要正、负导数，不能只找零导数

$$f(a) = f(b), \quad f \text{ 不恒为常数}$$

$$f'(u) > 0, \quad f'(v) < 0$$

罗尔只给 $f' = 0$ ；正负号来自向上、向下的两段割线。

② 从“不恒常”找一个中间高点或低点

$$\exists c \in (a, b) : \quad f(c) \neq f(a) = f(b)$$

$$f(c) > f(a) \quad \text{或} \quad f(c) < f(a)$$

端点都相等，所以非恒常的差异一定能在内点找到。

10 等端点的非恒常函数：正负导数分别构造 · 续

③ 两段拉格朗日，点的位置和分母都写清

f 在 $[a, c]$ 、 $[c, b]$ 均连续，内部均可导。

$$\exists \xi_1 \in (a, c) : f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

$$\exists \xi_2 \in (c, b) : f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

$$c - a > 0, \quad b - c > 0$$

④ 分两种符号，得到同一存在结论

$$f(c) > f(a) : f'(\xi_1) > 0 > f'(\xi_2)$$

$$f(c) < f(a) : f'(\xi_1) < 0 < f'(\xi_2)$$

分别把导数为正的点命名为 u 、为负的点命名为 v 。

$$\boxed{\exists u, v \in (a, b) : f'(u) > 0, f'(v) < 0}$$

不能同时额外要求 $u < v$ ；第二种情形中正导数点在右侧。

10 等端点的非恒常函数：正负导数分别构造 · 续

⑤ 等长两段：为何导数和恰好为零

另取 F 在 $[0, 1]$ 连续、内部可导且 $F(0)=F(1)$ 。此分支允许常函数。

$$\exists u \in (0, \frac{1}{2}) : F'(u) = 2[F(\frac{1}{2}) - F(0)]$$

$$\exists v \in (\frac{1}{2}, 1) : F'(v) = 2[F(1) - F(\frac{1}{2})]$$

$$F'(u) + F'(v) = 2[F(1) - F(0)] = 0$$

⑥ 若目标含 u^2+v^2 ，辅助项从导数反推

$$f'(u) + f'(v) = u^2 + v^2$$

↓ 移项后，希望两处 F' 相加为零

$$F'(x) = f'(x) - x^2 \implies F(x) = f(x) - \frac{x^3}{3}$$

$$f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3} \implies F(0) = F(1) = 0$$

对 F 使用上一步的两段拉格朗日，立即得到目标，且 u, v 位于不同半区间。

10 等端点的非恒常函数：正负导数分别构造 · 续

⑦ 对称辅助函数还能指定 $v=1-u$

$$G(x) = F(x) - F(1-x)$$

$$G(0) = 0, \quad G\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$G'(x) = F'(x) + F'(1-x)$$

注意链式法则里的两个负号相消。在 $[0, 1/2]$ 用罗尔：

$$\exists u \in (0, \frac{1}{2}) : G'(u) = 0, \quad v = 1 - u \in (\frac{1}{2}, 1)$$

$$F'(u) + F'(v) = 0$$

⑧ 必须保留的条件

$$f \equiv C \implies f' \equiv 0$$

所以正负导数那一问必须排除常函数；导数和等于零的分支则不必排除。

$$\text{正负号} \rightarrow \text{两段拉格朗日}; \quad \text{对称和} \rightarrow F(x) - F(1-x)$$

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 4 条题源

11 二阶导数比值：先排除分母零点，再构造乘积差

f, g 在 $[a, b]$ 二阶可导, $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, $g''(x) \neq 0$ 对所有 $a < x < b$ 成立。

$$g(x) \neq 0 \ (a < x < b), \quad \exists c \in (a, b) : \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}$$

① 读题：同一点的两个比值

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}$$

↓ 先想到交叉相乘，但必须先确认两个分母

$$f''(c)g(c) - f(c)g''(c) = 0$$

$g'' \neq 0$ 已知； g 在内部是否为零，还需要证明。

② 选定理：一个二阶比值拆成两项任务

$$g(a) = g(b) = 0, \quad g'' \neq 0 \rightarrow \text{用两层罗尔排除第三零点}$$

$$f''g - fg'' \rightarrow (f'g - fg')' \rightarrow \text{再用一次罗尔}$$

直接对 f/g 套罗尔不合适：两个端点都出现 $0/0$ 。

11 二阶导数比值：先排除分母零点，再构造乘积差 · 续

③ 分母检查：假设 g 在内部还有零点

$$g(t) = 0, \quad a < t < b$$

$$[a, t] : \exists \xi_1 \in (a, t), \quad g'(\xi_1) = 0$$

$$[t, b] : \exists \xi_2 \in (t, b), \quad g'(\xi_2) = 0$$

g' 在内部可导，故在 $[\xi_1, \xi_2]$ 连续；再用罗尔。

$$\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2) : g''(\eta) = 0 \quad \text{矛盾}$$

$$g(x) \neq 0 \quad (a < x < b)$$

④ 辅助函数从抵消交叉项而来

$$(f'g)' = f''g + f'g'$$

$$(fg')' = f'g' + fg''$$

↓ 两式相减，交叉项 $f'g'$ 抵消

$$(f'g - fg')' = f''g - fg''$$

$$F(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$$

11 二阶导数比值：先排除分母零点，再构造乘积差 · 续

⑤ 端点条件为什么够用

$$f(a) = g(a) = 0 \implies F(a) = 0$$

$$f(b) = g(b) = 0 \implies F(b) = 0$$

按本条条件， f 、 g 在闭区间二阶可导，端点取单侧； f' 、 g' 在端点连续，因此 F 闭区间连续、内部可导。

若只给内部二阶可导，不能自动省掉 F 在端点连续的检查。

⑥ 正式使用罗尔并恢复比值

$$\exists c \in (a, b) : 0 = F'(c) = f''(c)g(c) - f(c)g''(c)$$

$$f''(c)g(c) = f(c)g''(c)$$

↓ $g(c) \neq 0$ 已证， $g''(c) \neq 0$ 由题设

$$\boxed{\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}}$$

11 二阶导数比值：先排除分母零点，再构造乘积差 · 续

⑦ 到底用了几次罗尔？

排除 g 的第三零点： $2 + 1 = 3$ 次

对 $F = f'g - fg'$ ：1 次

前三次处于反证分支中；后一条才产生最终所需的 c 。不是把四次产生的点当成同一个。

⑧ 看见二阶乘积差的下一行

$$f''g - fg'' = (f'g - fg')'$$

$$g(x) = (x - a)(x - b) \implies g'' = 2, \quad g(x) \neq 0 \quad (a < x < b)$$

此例能直观看到：端点为零与内部无零点并不矛盾。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · [2 条题源](#)

12 固定长度增量的单调性与次可加不等式

f 在 $[0, \infty)$ 连续, 在 $(0, \infty)$ 二阶可导; 首个分支 $f'' < 0, f(0) = 0$ 。整数采样分支另设 $f'' > 0$ 。

$$a, b > 0, f'' < 0: \quad f(a+b) < f(a) + f(b)$$

① 读题：和式不等式，先移项成两个等长增量

$$f(a+b) < f(a) + f(b), \quad f(0) = 0$$

$$f(a+b) - f(a) < f(b) - f(0)$$

↓ 两段长度都等于 b ，只是起点从 0 移到 a

$$F(t) = f(t+b) - f(t)$$

② 为什么别把两个任意中值点硬排序

$$f(a+b) - f(a) = bf'(\xi_1), \quad a < \xi_1 < a+b$$

$$f(b) - f(0) = bf'(\xi_2), \quad 0 < \xi_2 < b$$

若 $a < b$ ，两段重叠，不能仅凭这些位置断言 $\xi_1 > \xi_2$ 。改为固定长度增量函数。

12 固定长度增量的单调性与次可加不等式 · 续

③ 先由 $f'' < 0$ 得到 f' 严格递减

$$0 < u < v: \quad f'(v) - f'(u) = f''(\eta)(v - u)$$

$$\eta \in (u, v), \quad f''(\eta) < 0, \quad v - u > 0$$

$$f'(v) < f'(u)$$

对 f' 用拉格朗日：内部二阶可导保证 f' 在 $[u, v]$ 连续、内部可导。

④ 增量函数求导后，点的位置确定

$$F'(t) = f'(t + b) - f'(t)$$

$$b > 0 \implies t + b > t \implies F'(t) < 0 \quad (t > 0)$$

这次比较的是明确的 $t+b$ 与 t ，不存在两个未知中值点的排序问题。

12 固定长度增量的单调性与次可加不等式 · 续

⑤ 完整证明：再用拉格朗日比较 $F(a)$ 、 $F(0)$

F 在 $[0, a]$ 连续、内部可导。

$$F(a) - F(0) = F'(\xi)a < 0, \quad 0 < \xi < a$$

$$f(a+b) - f(a) < f(b) - f(0) = f(b)$$

$$\boxed{f(a+b) < f(a) + f(b)}$$

⑥ 如果 $f(0)$ 不为零，该保留什么

$$f(a+b) < f(a) + f(b) - f(0)$$

这一式才对任意纵向平移保持一致。

$$f(x) = \sqrt{x+1}: \quad f''(x) < 0, \quad f(0) = 1$$

$$f(a+b) < f(a) + f(b) - 1$$

12 固定长度增量的单调性与次可加不等式 · 续

⑦ 凸函数的整数增量：另一分支

另设 $f'' > 0$ ；对各个互不重叠的单位区间使用拉格朗日。

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n), \quad n < \xi_n < n+1 < \xi_{n+1}$$

$$f(n+2) - f(n+1) > f(n+1) - f(n)$$

$$f(2) > f(1) \implies f(n) \geq f(1) + (n-1)[f(2) - f(1)] \rightarrow +\infty$$

⑧ 仅知最初一次下降，不能判断最终极限

$$f(x) = e^{-x} : \quad f'' > 0, f(2) < f(1), f(n) \rightarrow 0$$

$$f(x) = (x-2)^2 : \quad f'' > 0, f(2) < f(1), f(n) \rightarrow +\infty$$

导数递增并不等于导数始终为正；初始正增量是上一步推出发散的重要条件。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 3 条题源

13 导数乘积差的符号：转为商函数比较

f, g 在区间上可导, $g > 0$, $f'g - fg' < 0$; $a < x < b$ 位于该区间。

$$f(x)g(b) > f(b)g(x), \quad f(x)g(a) < f(a)g(x)$$

① 读题：一正一负的交叉导数，认商法则

$$(f'g - fg' < 0), \quad (g > 0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

若是加号 $f'g + fg'$ ，才是乘积的导数；这里是减号。

② 先把目标除成比值，看看想比较谁

$$f(x)g(b) > f(b)g(x)$$

↓ $g(x)g(b) > 0$ ，除过去不变号

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$$

$$a < x < b \quad \text{提示 } \frac{f}{g} \text{ 严格递减}$$

13 导数乘积差的符号：转为商函数比较 · 续

③ 辅助函数与定义域检查

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$g(x) > 0 \implies g(x) \neq 0 \implies F \text{ 可导}$$

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} < 0$$

④ 选拉格朗日：把导数的符号传给函数差

任取 $u < v$ ； F 在 $[u, v]$ 连续、内部可导。

$$F(v) - F(u) = F'(\xi)(v - u), \quad u < \xi < v$$

$$F'(\xi) < 0, \quad v - u > 0 \implies F(v) < F(u)$$

此处不需要罗尔的端点相等；目标就是比较不等。

13 导数乘积差的符号：转为商函数比较 · 续

⑤ 按 $a < x < b$ 排好三个函数值

$$F(a) > F(x) > F(b)$$

$$\frac{f(a)}{g(a)} > \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$$

区间中的 a 、 x 、 b 都是函数有定义且可导的位置。

⑥ 交叉相乘，逐次保留正号依据

$$g(a)g(x) > 0 \implies f(a)g(x) > f(x)g(a)$$

$$g(x)g(b) > 0 \implies f(x)g(b) > f(b)g(x)$$

$$f(x)g(a) < f(a)g(x), \quad f(x)g(b) > f(b)g(x)$$

13 导数乘积差的符号：转为商函数比较 · 续

⑦ 为什么不能改成乘积 fg 递减

$$f = e^x, \quad g = e^{2x}$$

$$f'g - fg' = -e^{3x} < 0$$

$$(fg)' = (e^{3x})' = 3e^{3x} > 0$$

$$\frac{f}{g} = e^{-x} \text{ 递减, 但 } fg = e^{3x} \text{ 递增}$$

⑧ 若条件只给 $g \neq 0$ ，应检查什么

可导函数连续；在一个区间内无零点， g 就不能变号。

$$g(a)g(x) > 0, \quad g(x)g(b) > 0$$

所以若整个区间 $g \neq 0$ ，这两个乘积仍为正；若只知道某几个点非零，则不能据此跨越中间零点套商函数比较。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 2 条题源

14 中间交点把两段割线斜率变成倒数

f 在 $[0, 1]$ 连续, 在 $(0, 1)$ 可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$ 。

$$\exists 0 < u < c < v < 1: \quad f(c) = 1 - c, \quad f'(u)f'(v) = 1$$

① 读题：两个导数相乘等于 1

$$f'(u)f'(v) = 1, \quad f(0) = 0, f(1) = 1$$

两个斜率互为倒数 $\longrightarrow \frac{1-c}{c} \cdot \frac{c}{1-c}$

要同时制造两个不同的点，先把区间分成不相交两段。

② 从目标倒推中间点应满足什么

$$[0, c] \text{ 的斜率} = \frac{f(c)}{c}$$

$$[c, 1] \text{ 的斜率} = \frac{1-f(c)}{1-c}$$

$$f(c) = 1 - c \implies \frac{f(c)}{c} = \frac{1-c}{c}, \quad \frac{1-f(c)}{1-c} = \frac{c}{1-c}$$

14 中间交点把两段割线斜率变成倒数 · 续

③ 辅助函数从这条交点等式直接移项

$$f(c) = 1 - c \iff f(c) + c - 1 = 0$$

$$F(x) = f(x) + x - 1$$

$$F(0) = -1, \quad F(1) = 1$$

④ 选介值先造 c ，不能直接假设交点存在

F 在 $[0, 1]$ 连续，端点异号。

$$\exists c \in (0, 1) : F(c) = 0$$

$$f(c) = 1 - c, \quad c > 0, 1 - c > 0$$

c 为内点，也保证接下来所有分母非零。

14 中间交点把两段割线斜率变成倒数 · 续

⑤ 左段拉格朗日：产生第一个点

f 在 $[0, c]$ 连续、内部可导。

$$\exists u \in (0, c) : f'(u) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0}$$

$$f'(u) = \frac{1 - c}{c}$$

⑥ 右段拉格朗日：产生第二个点

f 在 $[c, 1]$ 连续、内部可导。

$$\exists v \in (c, 1) : f'(v) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c}$$

$$f'(v) = \frac{1 - (1 - c)}{1 - c} = \frac{c}{1 - c}$$

14 中间交点把两段割线斜率变成倒数 · 续

⑦ 相乘并核对点确实不同

$$f'(u)f'(v) = \frac{1-c}{c} \cdot \frac{c}{1-c} = 1$$

$$\boxed{0 < u < c < v < 1}$$

不相交的两个开区间保证 $u \neq v$ ；这不是可以省略的附带说明。

⑧ 为什么一次拉格朗日不够

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$$

只有一个点，不能把它写两遍来冒充两个不同的点。

$$f(x) = x^2 : \quad c^2 = 1 - c, \quad c = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

再分别在 $[0, c]$ 、 $[c, 1]$ 用定理，就沿上述证明产生真正分开的两个点。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · [2 条题源](#)

15 相同内部最大值：怎样造第三零点，再用两层三次罗尔

f, g 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 二阶可导， $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ ；相同最大值 M 分别在内部点 $c, d \in (a, b)$ 达到。

$$\exists t \in (a, b) : f''(t) = g''(t)$$

① 读题：相同最大值不等于同一点取到

$$f(c) = M, \quad g(d) = M, \quad c, d \in (a, b)$$

$$f(x) \leq M, \quad g(x) \leq M$$

c, d 可以不同；利用各自取最大值，得到差函数的正负信息。

② 目标二阶导数相等，先移项

$$f''(t) = g''(t) \iff (f - g)''(t) = 0$$

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

$$f(a) = g(a), f(b) = g(b) \implies F(a) = F(b) = 0$$

15 相同内部最大值：怎样造第三零点，再用两层三次罗尔 · 续

③ 还缺第三个零点：最大值条件补在哪里

$$F(c) = f(c) - g(c) = M - g(c) \geq 0$$

$$F(d) = f(d) - g(d) = f(d) - M \leq 0$$

若 $c=d$ ，则 $F(c)=0$ ；否则继续看两处是否已经出现等号。

④ 介值给出严格内部的第三零点

$$F(c) = 0 \text{ 或 } F(d) = 0 \implies \exists e \in (a, b) : F(e) = 0$$

$$F(c) > 0 > F(d) \implies \exists e \in (\min(c, d), \max(c, d)) : F(e) = 0$$

$$F(a) = F(e) = F(b) = 0$$

两种情况都能保证 e 不等于外端点。

15 相同内部最大值：怎样造第三零点，再用两层三次罗尔 · 续

⑤ 第一层：两段各一次罗尔

F 在 $[a, b]$ 连续，内部二阶可导。

$$\exists \xi_1 \in (a, e) : F'(\xi_1) = 0$$

$$\exists \xi_2 \in (e, b) : F'(\xi_2) = 0$$

$$a < \xi_1 < e < \xi_2 < b$$

⑥ 第二层：再对 F' 用罗尔

F' 在内部可导，故在 $[\xi_1, \xi_2]$ 连续；端点值同为零。

$$\exists t \in (\xi_1, \xi_2) : F''(t) = 0$$

$$F''(t) = f''(t) - g''(t)$$

$$\boxed{f''(t) = g''(t)}, \quad t \in (a, b)$$

15 相同内部最大值：怎样造第三零点，再用两层三次罗尔 · 续

⑦ 调用次数与条件边界

第一层 **2** 次 + 第二层 **1** 次 = **3** 次罗尔

最大值必须能在内点取得；若只在端点取到，就可能没有第三个内点零点。

本条按明确补全的“内部取得”条件讲解；原题若条件更弱，要先检查结论，而不是悄悄加条件。

⑧ 反例：只有同最大值还不够

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = x, \quad g(x) = x^2$$

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f(1) = g(1) = 1, \quad \max f = \max g = 1$$

$$f'' = 0, \quad g'' = 2 \implies f'' \neq g'' \text{ 处处成立}$$

两者最大值只在端点 1 取到，恰好暴露出缺失条件。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · [3 条题源](#)

16 加权平均等于端点值：先介值后罗尔

f 在 $[a, b]$ 连续、在 (a, b) 可导； $a \leq t_1 < t_2 < t_3 < b$, $p, q, r > 0$,
 $pf(t_1) + qf(t_2) + rf(t_3) = (p + q + r)f(b)$ 。

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$$

① 读题：正权平均等于右端点值

$$pf(t_1) + qf(t_2) + rf(t_3) = (p + q + r)f(b)$$

$$p, q, r > 0, \quad a \leq t_1 < t_2 < t_3 < b$$

目标 $f' = 0$ ，倒推需要右端点之外的另一个等高点。

② 移项：三个差值的正权和为零

$$p[f(t_1) - f(b)] + q[f(t_2) - f(b)] + r[f(t_3) - f(b)] = 0$$

$$F(x) = f(x) - f(b), \quad pF(t_1) + qF(t_2) + rF(t_3) = 0$$

减的是同一个常数，导数仍是 f' 。

16 加权平均等于端点值：先介值后罗尔 · 续

③ 正权条件实际排除了什么

$$F(t_i) > 0 \ (i = 1, 2, 3) \implies pF(t_1) + qF(t_2) + rF(t_3) > 0$$

$$F(t_i) < 0 \ (i = 1, 2, 3) \implies pF(t_1) + qF(t_2) + rF(t_3) < 0$$

$$\min_i F(t_i) \leq 0 \leq \max_i F(t_i)$$

④ 先选介值，不能用罗尔

若某个 $F(t_i)=0$ ，直接取 $c=t_i$ ；否则有一正一负。

F 连续，在相应两点之间用介值定理，得到

$$\exists c \in [t_1, t_3] : F(c) = 0$$

$$c \leq t_3 < b \implies c \neq b$$

16 加权平均等于端点值：先介值后罗尔 · 续

⑤ 罗尔的完整条件与结论

$$F(c) = F(b) = 0$$

F 在 $[c, b]$ 连续、在 (c, b) 可导。即便 $c=a$ ，也仍满足题设。

$$\exists \xi \in (c, b) : F'(\xi) = 0$$

$$\boxed{f'(\xi) = 0}, \quad a < \xi < b$$

⑥ 熟悉的等权例子怎样对应

$$f(0) + f(1) + f(2) = 3, \quad f(3) = 1$$

$$f(0) + f(1) + f(2) = 3f(3)$$

$$a = 0, b = 3, \quad (t_1, t_2, t_3) = (0, 1, 2), \quad p = q = r = 1$$

按前述正权与介值步骤找到 $c < 3$ ，再在 $[c, 3]$ 用罗尔。

16 加权平均等于端点值：先介值后罗尔 · 续

⑦ 为什么“右边是端点”能保证两个点不同

$$t_3 < b \implies c \in [t_1, t_3] \implies c < b$$

若平均值等于某个采样区间内部点的函数值，介值得到的点可能恰好就是它，未必得到第二个不同点。

$$f(x) = x : \quad \frac{f(0) + f(2)}{2} = f(1), \quad f' \equiv 1$$

⑧ 负权反例：平均值不再受最大最小值夹住

$$f(x) = x : \quad -f(0) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) = f(3)$$

$$-1 + 2 = 1, \quad f' \equiv 1$$

形式上仍是权重和乘端点值，但有负权，无法沿用第③步的符号判断。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 1 条题源

17 有限开区间上导数有界推出函数有界

$-\infty < a < b < \infty$, f 在 (a, b) 可导, $|f'| \leq M$ 。

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad |f(x)| \leq |f(\frac{a+b}{2})| + \frac{M(b-a)}{2}$$

① 读题：导数有界，怎样控制函数值？

$$(|f'(x)| \leq M), \quad -\infty < a < b < \infty$$

先控 $|f(x) - f(y)|$ 再固定一个 y

没有端点连续条件，所以只在内部闭区间用中值定理。

② 选拉格朗日：把函数差换成导数乘距离

$$x < y, \quad x, y \in (a, b)$$

f 在 (a, b) 可导，因而在 $[x, y]$ 连续、内部可导。

$$\exists \xi \in (x, y) : f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$$

17 有限开区间上导数有界推出函数有界 · 续

③ 绝对值的每一步依据

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &= |f'(\xi)| |y - x| \\ &\leq M |y - x|\end{aligned}$$

$x > y$ 时交换两点； $x = y$ 时两边同为零。

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|} \quad (x, y \in (a, b))$$

④ 为什么选一个固定中点

$$c = \frac{a + b}{2} \in (a, b), \quad |x - c| < \frac{b - a}{2}$$

中点处 $f(c)$ 是一个固定有限数；它不是随 x 改变的未知上界。

$$|f(x) - f(c)| \leq M|x - c| \leq \frac{M(b - a)}{2}$$

17 有限开区间上导数有界推出函数有界 · 续

⑤ 加减 $f(c)$ ，完成函数有界的证明

$$f(x) = f(c) + [f(x) - f(c)]$$

↓ 三角不等式

$$|f(x)| \leq |f(c)| + |f(x) - f(c)|$$

$$\boxed{|f(x)| \leq |f(\frac{a+b}{2})| + \frac{M(b-a)}{2}}$$

右边与 x 无关，所以是整个开区间上的统一上界。

⑥ 只说 f 和 f' 连续，够不够？

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ 在 } (0, 1) \text{ 连续}$$

$$x \rightarrow 0^+ : f(x) \rightarrow +\infty$$

开区间上的连续函数不一定有界；不能套闭区间最值定理。

17 有限开区间上导数有界推出函数有界 · 续

⑦ 反向命题也不成立

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 < x < 1$$

$$0 < f(x) < 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 0^+)$$

函数有界不能反推出导数有界。

⑧ 有限区间这一条件在哪里使用？

$$|x - c| \leq \frac{b - a}{2}$$

正是在控制距离时用到区间有限。

$$f(x) = x, \quad 0 < x < \infty: \quad f'(x) = 1 \text{ 有界, } f \text{ 无界}$$

函数差 $\rightarrow$ 导数界 $\times$ 距离界 $\rightarrow$ 固定点加减

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 1 条题源

18 端点导数异号保证内部最大值，不保证函数零点

$a < b, f \in C^1([a, b])$ ，端点导数取对应单侧， $f'(a) > 0 > f'(b)$ 。

$$\exists c \in (a, b) : f(c) > \max\{f(a), f(b)\}, \quad f'(c) = 0$$

① 读题：端点导数一正一负，指向的是高度变化

$$f'_+(a) > 0, \quad f'_-(b) < 0$$

左端向右走会升高，右端向左走也会升高；两端都不是最大点。

目标：内部最大点 c ， $f'(c) = 0$

② 定理选择：最值定理加费马

f 在 $[a, b]$ 连续 $\rightarrow$ 最大值取得

排除两端 $\rightarrow c \in (a, b) \xrightarrow{\text{费马}} f'(c) = 0$

不必硬构造两端等值；罗尔缺少 $f(a)=f(b)$ ，也不是现有条件的直接入口。

18 端点导数异号保证内部最大值，不保证函数零点 · 续

③ 用单侧导数定义证明左端不是最大点

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_+(a) > 0$$

$$\exists h_1 > 0 : \quad 0 < h_1 < b - a, \quad \frac{f(a+h_1) - f(a)}{h_1} > 0$$

$$f(a+h_1) > f(a)$$

④ 右端要留意负增量

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(b-h) - f(b)}{-h} = f'_-(b) < 0$$

$$\exists h_2 > 0 : \quad \frac{f(b-h_2) - f(b)}{-h_2} < 0$$

↓ 乘以 $-h_2 < 0$ ，方向反过来

$$f(b-h_2) > f(b)$$

18 端点导数异号保证内部最大值, 不保证函数零点 · 续

⑤ 最大值存在, 而且严格超过两个端点

由闭区间连续性, 取 $c \in [a, b]$ 使 $f(c) = \max f$ 。

$$f(c) \geq f(a + h_1) > f(a)$$

$$f(c) \geq f(b - h_2) > f(b)$$

$$c \in (a, b), \quad f(c) > \max\{f(a), f(b)\}$$

⑥ 费马定理的左右差商

$$f(c + h) - f(c) \leq 0$$

$$h > 0: \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0; \quad h < 0: \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$

f 在 c 可导, 左右极限相等。

$$f'(c) \leq 0, \quad f'(c) \geq 0 \implies f'(c) = 0$$

18 端点导数异号保证内部最大值，不保证函数零点 · 续

⑦ 为何不能顺便说 f 有零点

$$f(x) = 1 + (x - a)(b - x) \geq 1 \quad (a \leq x \leq b)$$

$$f'(a) = b - a > 0, \quad f'(b) = a - b < 0$$

函数始终为正，却满足导数端点异号。导数条件不决定图像相对横轴的高度。

⑧ 第二视角的简化：不需要多加导数连续

上面直接用了单侧导数定义；并未依赖 f' 在整个闭区间连续。

$$f \in C[a, b], f \text{ 内部可导}, f'_+(a) > 0 > f'_-(b)$$

$$\implies \text{内部取严格高于端点的最大值, 并有 } f'(c) = 0$$

原专题的 C^1 条件足够；本路线还能看清真正用到哪些条件。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 1 条题源

19 对数不等式：交叉相乘、无量纲换元和导数下界

第一分支 $x > 1$ ；差商分支 $0 < a < b$ ；参数分支 $x > 0, k \geq \ln 2 - 1$ 。

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}; \quad \frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

① 第一类读题：分母有对数，先核对符号

$$x > 1: \quad \frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$$

$$(1+x) \ln x > 0$$

$$\iff (1+x) \ln(1+x) - x \ln x > 0$$

交叉相乘先过“正分母”这一关，再把差叫作 F。

② 辅助函数求导：相同常数项自动抵消

$$F(x) = (1+x) \ln(1+x) - x \ln x$$

$$F'(x) = \ln(1+x) + 1 - \ln x - 1 = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0$$

$$F(x) > F(1) = 2 \ln 2 > 0 \quad (x > 1)$$

F 连续可导；对 $[1, x]$ 用拉格朗日得严格递增，再除回正分母即得第一类结论。

19 对数不等式：交叉相乘、无量纲换元和导数下界 · 续

③ 差商下界：拉格朗日能直接做到哪一步

$$0 < a < b: \quad \frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{\xi}, \quad a < \xi < b$$

$$\frac{1}{\xi} > \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{b} - \frac{2a}{a^2 + b^2} = \frac{(b - a)^2}{b(a^2 + b^2)} > 0$$

$$\boxed{\frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{2a}{a^2 + b^2}}$$

④ 差商上界：中值点位于中间仍然不够

$$\text{目标:} \quad \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

仅有 $a < \xi < b$ ，不能推出 $\xi > \sqrt{ab}$ 。换用目标本身提示的平方根比例。

$$u = \sqrt{\frac{b}{a}} > 1, \quad b = au^2, \quad \sqrt{ab} = au$$

$$\frac{2 \ln u}{a(u^2 - 1)} < \frac{1}{au} \iff 2 \ln u < u - \frac{1}{u}$$

19 对数不等式：交叉相乘、无量纲换元和导数下界 · 续

⑤ 上界的辅助函数来自移项

$$G(u) = u - \frac{1}{u} - 2 \ln u, \quad G(1) = 0$$

$$G'(u) = 1 + \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} = \frac{(u-1)^2}{u^2} > 0 \quad (u > 1)$$

$$G(u) > G(1) = 0$$

$$\boxed{\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}}$$

⑥ 参数分支：让导数分子出现一个可求的最小值

$$F(x) = x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1, \quad F(1) = 0$$

$$F'(x) = 1 - \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2k}{x} = \frac{x - 2 \ln x + 2k}{x}$$

$$(x - 2 \ln x)' = \frac{x - 2}{x}$$

$x > 0$ ；在 $(0, 2)$ 递减、 $(2, \infty)$ 递增，所以

$$x - 2 \ln x \geq 2 - 2 \ln 2$$

19 对数不等式：交叉相乘、无量纲换元和导数下界 · 续

⑦ 参数怎样保证整个函数单调

$$k \geq \ln 2 - 1 \implies x - 2 \ln x + 2k \geq 0$$

$$F'(x) \geq 0 \quad (x > 0)$$

$$x > 1 : F(x) \geq 0; \quad 0 < x < 1 : F(x) \leq 0$$

$$(x - 1)[x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1] \geq 0$$

这里给的是充分条件；没有证明参数范围的必要性，不标为“当且仅当”。

⑧ 三个入口各自对应什么结构

分式大小 $\rightarrow$ 核对分母符号 $\rightarrow$ 移项作差

对数差商 $\rightarrow$ 拉格朗日；过不去的更强界另作差

含参数导数 $\rightarrow$ 分子最小值 $\rightarrow$ 参数下界

换元的 u 是一个正比例，降低两个参数的复杂度；不是看到对数就必须换元。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · [3 条题源](#)

20 唯一实根：导数正证明唯一，介值证明存在

第一分支 $a, b, c \in \mathbb{R}, 5b > 3a^2$ ；第二分支 $p \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$ 。

$x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$ 与 $x + p + q \cos x = 0$ 各恰有一实根

① 读题：“恰有一个实根”含两个任务

存在

+

至多一个

异号端点 $\rightarrow$ 介值；严格单调 $\rightarrow$ 唯一

导数恒正只能排除两根，不能单独保证存在。

② 多项式条件 $5b > 3a^2$ 怎样进入导数

$$F(x) = x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c$$

$$F'(x) = 5x^4 + 6ax^2 + 3b$$

↓ 把它看成关于 x^2 的二次式，配平方

$$F'(x) = 5 \left(x^2 + \frac{3a}{5} \right)^2 + \frac{3(5b - 3a^2)}{5} > 0$$

20 唯一实根：导数正证明唯一，介值证明存在 · 续

③ 唯一性的完整证明

F 在任意有限闭区间连续、内部可导。若 $u < v$ 是两根，

$$0 = F(v) - F(u) = F'(\xi)(v - u) > 0 \quad (u < \xi < v)$$

矛盾，所以至多一个根。也可对两根之间直接用罗尔与 $F' > 0$ 矛盾。

④ 存在性的完整证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$$

$$\exists R > 0 : \quad F(-R) < 0 < F(R)$$

F 在 $[-R, R]$ 连续，介值定理给内部零点。

$$x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0 \text{ 恰有一个实根}$$

20 唯一实根：导数正证明唯一，介值证明存在 · 续

⑤ 带三角函数的另一题：先看幅度界

$$G(x) = x + p + q \cos x, \quad 0 < q < 1$$

$$G'(x) = 1 - q \sin x \geq 1 - q > 0$$

与上一题同理，拉格朗日或罗尔排除两个不同根。

⑥ 端点从 $|q \cos x| \leq q$ 反推

$$u = -p - q - 1, \quad v = -p + q + 1$$

$$G(u) = -q - 1 + q \cos u \leq -1 < 0$$

$$G(v) = q + 1 + q \cos v \geq 1 > 0$$

$$u < v \xrightarrow{\text{介值}} \exists \xi \in (u, v) : G(\xi) = 0$$

20 唯一实根：导数正证明唯一，介值证明存在 · 续

⑦ 参数的角色分别是什么

$$5b > 3a^2 \rightarrow F' > 0; \quad 4c \rightarrow \text{纵向平移}$$

$$0 < q < 1 \rightarrow 1 - q \sin x > 0; \quad p \rightarrow \text{改变根的位置}$$

常数项不进入导数，但仍影响根在哪里；不能因为求导消失，就说它不影响方程。

⑧ 检查“只单调”这一漏洞

$$H(x) = e^x : \quad H'(x) > 0, \quad H(x) > 0 \text{ 对所有实数 } x$$

严格递增，却没有实零点。每个“唯一根”证明都要明确写出一次存在性依据。

先找异号端点，再排除两根；顺序也可交换，但两步都要有。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · [2 条题源](#)

21 递增凸函数的切线与零点之间的位置

$f \in C^2[a, \infty)$, $f(a) = 0$, $f' > 0$, $f'' > 0$, $b > a$ 。

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \Rightarrow a < x_0 < b$$

① 读题：横截距公式是怎么来的

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

$$y = f(b) + f'(b)(x - b), \quad y = 0$$

$$x = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = x_0$$

这是 b 处切线与横轴的交点；目标是 $a < x_0 < b$ 。

② 从目标倒推要估计的分式

$$a < b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b$$

$$\iff 0 < \frac{f(b)}{f'(b)} < b - a$$

此处只是移项，不需要先乘未知符号。下一步用 $f' > 0$ 确认分母为正。

21 递增凸函数的切线与零点之间的位置 · 续

③ 第一次拉格朗日：把函数值换成一阶导数

$$f(a) = 0$$

f 在 $[a, b]$ 连续、内部可导。

$$\exists \xi \in (a, b) : \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

$$f'(\xi) > 0, b - a > 0 \implies f(b) > 0$$

④ 第二次拉格朗日：用凸性比较两个导数

f' 在 $[\xi, b]$ 连续、内部可导。

$$f'(b) - f'(\xi) = f''(\eta)(b - \xi), \quad \xi < \eta < b$$

$$f''(\eta) > 0, b - \xi > 0 \implies f'(b) > f'(\xi) > 0$$

21 递增凸函数的切线与零点之间的位置 · 续

⑤ 两条式子接起来，得到目标分式范围

$$0 < \frac{f'(\xi)}{f'(b)} < 1$$

↓ 乘以正数 $b-a$

$$0 < \frac{(b-a)f'(\xi)}{f'(b)} < b-a$$

$$\boxed{0 < \frac{f(b)}{f'(b)} < b-a}$$

⑥ 最后减法要逐端写清

$$\frac{f(b)}{f'(b)} > 0 \implies b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b$$

$$\frac{f(b)}{f'(b)} < b-a \implies b - \frac{f(b)}{f'(b)} > a$$

$$\boxed{a < x_0 < b}$$

21 递增凸函数的切线与零点之间的位置 · 续

⑦ 另一入口：严格凸函数在切线上方

$$f(a) > f(b) + f'(b)(a - b)$$

$$f(a) = 0 \implies f(b) < f'(b)(b - a)$$

再用 $f(b) > 0$ 、 $f'(b) > 0$ ，就恢复同一个分式夹逼。

若尚未掌握切线不等式，前面的两次拉格朗日就是它在本题中的直接证明。

⑧ 为什么要严格凸，而不只要求凸

$$f(x) = x - a : \quad f'(x) = 1, \quad f''(x) = 0$$

$$x_0 = b - \frac{b - a}{1} = a$$

只有非严格凸时，交点可能落在左端，不能保证 $a < x_0$ 。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 1 条题源

22 两端泰勒相加相减与内部高阶导数点

$a > 0$; 二阶结论要求 $f \in C^2[-a, a]$, 三阶结论要求 $f \in C^3[-a, a]$ 。

$$\exists \xi \in (-a, a) : f''(\xi) = \frac{f(a) + f(-a) - 2f(0)}{a^2}$$

① 读题：对称端点提示加减消项

$$(f(a) + f(-a) - 2f(0)) \rightarrow \text{消一次项}$$

$$(f(a) - f(-a) - 2af'(0)) \rightarrow \text{消常数与二次项}$$

二阶结论设 $f \in C^2[-a, a]$; 三阶结论设 $f \in C^3[-a, a]$, $a > 0$ 。

② 二阶：以 0 为中心的两次泰勒

$$f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(\xi_+), \quad 0 < \xi_+ < a$$

$$f(-a) = f(0) - af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(\xi_-), \quad -a < \xi_- < 0$$

↓ 相加, 再减 $2f(0)$

$$\frac{f(a) + f(-a) - 2f(0)}{a^2} = \frac{f''(\xi_+) + f''(\xi_-)}{2}$$

22 两端泰勒相加相减与内部高阶导数点 · 续

③ 两个余项点怎样变成一个点

$$\min\{f''(\xi_-), f''(\xi_+)\} \leq \frac{f''(\xi_-) + f''(\xi_+)}{2} \leq \max\{f''(\xi_-), f''(\xi_+)\}$$

f'' 连续, 在 $[\xi_-, \xi_+]$ 上用介值定理。两端都严格位于 $(-a, a)$ 内。

$$\exists \xi \in [\xi_-, \xi_+] \subset (-a, a) : f''(\xi) = \frac{f''(\xi_-) + f''(\xi_+)}{2}$$

$$f''(\xi) = \frac{f(a) + f(-a) - 2f(0)}{a^2}$$

④ 三阶：先把 $\pm a$ 的符号展开

$$f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0) + \frac{a^3}{6}f^{(3)}(\eta_+)$$

$$f(-a) = f(0) - af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0) - \frac{a^3}{6}f^{(3)}(\eta_-)$$

$$-a < \eta_- < 0 < \eta_+ < a$$

↓ 第一式减第二式；两个三阶余项变成相加

$$f(a) - f(-a) - 2af'(0) = \frac{a^3}{6}[f^{(3)}(\eta_+) + f^{(3)}(\eta_-)]$$

22 两端泰勒相加相减与内部高阶导数点 · 续

⑤ 三阶也用连续介值合并

$$\exists \eta \in [\eta_-, \eta_+] : f^{(3)}(\eta) = \frac{f^{(3)}(\eta_+) + f^{(3)}(\eta_-)}{2}$$

$$f^{(3)}(\eta) = \frac{3[f(a) - f(-a) - 2af'(0)]}{a^3}$$

$$a = 1, f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0 \implies f^{(3)}(\eta) = 3$$

⑥ 若给内部极值点，为什么改在它处展开

另设 $c \in (-a, a)$ 为极值点；费马给 $f'(c) = 0$ 。

$$f(a) - f(c) = \frac{1}{2}(a - c)^2 f''(\eta_+)$$

$$f(-a) - f(c) = \frac{1}{2}(a + c)^2 f''(\eta_-)$$

$$c < \eta_+ < a, \quad -a < \eta_- < c$$

一次项由驻点条件直接消失。

22 两端泰勒相加相减与内部高阶导数点 · 续

⑦ 需要一个内部点控制绝对值时，选较大的余项

在 η_+ 、 η_- 中选一个记为 η ，使其二阶导数绝对值较大。

$$|f(a) - f(-a)| \leq \frac{1}{2}[(a-c)^2 + (a+c)^2]|f''(\eta)|$$

$$\frac{1}{2}[(a-c)^2 + (a+c)^2] = a^2 + c^2 \leq 2a^2$$

$$|f(a) - f(-a)| \leq 2a^2|f''(\eta)|, \quad \eta \in (-a, a)$$

⑧ 三种操作，不要混为一谈

相加或相减：消去不需要的低阶项

连续介值：把两个导数值的平均变成一个导数值

取较大绝对值：把两项估计统一由一个内点控制

这里使用的是精确余项；只写局部 Peano 展开，无法直接获得给定端点之间的精确中值等式。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 4 条题源

23 两个中值定理点的导数比：公共割线差消去

$f \in C[a, b]$, 在 (a, b) 可导且 $f' \neq 0$, $a < b$ 。

$$\exists \xi, \eta \in (a, b) : \frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$$

① 读题：指数增量与区间长度分开圈

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$$

$$b - a \leftrightarrow x, \quad e^b - e^a \leftrightarrow e^x, \quad e^{-\eta} = \frac{1}{e^\eta}$$

允许两个点，因此可以用两个定理分别产生它们。

② 从相除结果倒推两个等式

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} e^\eta$$

共同的端点差会约去；第一式选拉格朗日，第二式选 f 与 e^x 的柯西。先作为寻找路线的目标，后面分别证明。

23 两个中值定理点的导数比：公共割线差消去 · 续

③ 第一次定理同时证明端点增量非零

f 在 $[a, b]$ 连续、内部可导；拉格朗日给

$$\exists \xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

$$f'(\xi) \neq 0, \quad b - a > 0 \implies f(b) - f(a) \neq 0$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

④ 第二次：柯西先写交叉形式

f 与 e^x 都满足闭区间连续、开区间可导。

$$\exists \eta \in (a, b) : [f(b) - f(a)]e^\eta = (e^b - e^a)f'(\eta)$$

$$e^b - e^a > 0 \implies f'(\eta) = \frac{[f(b) - f(a)]e^\eta}{e^b - e^a}$$

23 两个中值定理点的导数比：公共割线差消去 · 续

⑤ 约分之前列齐非零依据

$$b - a > 0, \quad e^b - e^a > 0, \quad e^\eta > 0$$

$$f'(\eta) \neq 0 \text{ 由题设; } f(b) - f(a) \neq 0 \text{ 已证明}$$

这些条件保证相除与约去共同端点差合法；不需要知道 f' 正还是负。

⑥ 完整相除：除以分数改成乘倒数

$$\begin{aligned} \frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \div \frac{[f(b) - f(a)]e^\eta}{e^b - e^a} \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{e^b - e^a}{[f(b) - f(a)]e^\eta} \\ &= \frac{e^b - e^a}{(b - a)e^\eta} = \boxed{\frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}} \end{aligned}$$

23 两个中值定理点的导数比：公共割线差消去 · 续

⑦ 辅助函数入口：两个归一化因子

$$\frac{x-a}{b-a} : a \mapsto 0, b \mapsto 1; \quad \frac{e^x - e^a}{e^b - e^a} : a \mapsto 0, b \mapsto 1$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - [f(b) - f(a)] \frac{x-a}{b-a}$$

$$G(x) = f(x) - f(a) - [f(b) - f(a)] \frac{e^x - e^a}{e^b - e^a}$$

$$F(a) = F(b) = G(a) = G(b) = 0$$

各自连续可导，分别用罗尔得 $F'(\xi)=0$ 、 $G'(\eta)=0$ ，即前面两条等式；再按第⑥步相除。

⑧ 检查点的位置，不要加题目没要求的限制

$$\xi, \eta \in (a, b) \quad \text{可同可异，无须排序}$$

$$f(x) = x : \quad 1 = \frac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}$$

$$e^{\eta} = \frac{e^b - e^a}{b-a}$$

对 e^x 用拉格朗日，恰好保证这个 η 存在。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 1 条题源

24 增量与微分比较：两侧中值点和乘数符号

f 在开区间二阶可导；首分支 $f' > 0, f'' > 0$ ；第二分支 f' 严格递减且 $f(1) = f'(1) = 1$ 。

$$h > 0 : 0 < dy < \Delta y; \quad h < 0 : dy < \Delta y < 0$$

① 读题：增量与微分的差，先写原定义

$$\Delta y = f(x+h) - f(x), \quad dy = f'(x)h$$

$$f' > 0, \quad f'' > 0, \quad h \neq 0$$

x 、 $x+h$ 及连接它们的区间都要在定义域内。

② 第一次拉格朗日：把增量也写成导数乘 h

$$\Delta y = f'(\xi)h, \quad \xi \text{ 严格位于 } x \text{ 与 } x+h \text{ 之间}$$

$$\Delta y - dy = [f'(\xi) - f'(x)]h$$

现在未知量只有两个一阶导数的差；题给二阶导数正，继续对 f' 使用定理。

24 增量与微分比较：两侧中值点和乘数符号 · 续

③ 二次拉格朗日：同号的两个因子

$$f'(\xi) - f'(x) = f''(\eta)(\xi - x)$$

$$\Delta y - dy = f''(\eta)(\xi - x)h$$

$$h > 0 \Rightarrow \xi - x > 0; \quad h < 0 \Rightarrow \xi - x < 0$$

$$f''(\eta) > 0, \quad (\xi - x)h > 0 \implies \Delta y > dy$$

④ 正增量分支：补上与零的比较

$$h > 0, \quad f'(x) > 0 \implies dy = f'(x)h > 0$$

$$\Delta y > dy \implies \boxed{0 < dy < \Delta y}$$

函数值的增加量比切线预测的增加量大。

24 增量与微分比较：两侧中值点和乘数符号 · 续

⑤ 负增量分支：负数乘法别漏掉

$$h < 0, f'(\xi) > 0 \implies \Delta y = f'(\xi)h < 0$$

$$\Delta y > dy \implies \boxed{dy < \Delta y < 0}$$

这里两者都为负；大小顺序不能照搬正增量那一行。

⑥ 另一个分支：导数递减，函数在切线下方

另设 f' 严格递减，且 $f(1)=f'(1)=1$ 。

$$f(x) - f(1) = f'(\xi)(x - 1)$$

$$f(x) - x = [f'(\xi) - 1](x - 1) = [f'(\xi) - f'(1)](x - 1)$$

没有新辅助字母；直接减去切线 $y=x$ 。

24 增量与微分比较：两侧中值点和乘数符号 · 续

⑦ 左右分支各查一次符号

$$x < 1: x < \xi < 1, \quad f'(\xi) > 1, \quad x - 1 < 0 \implies f(x) - x < 0$$

$$x > 1: 1 < \xi < x, \quad f'(\xi) < 1, \quad x - 1 > 0 \implies f(x) - x < 0$$

$$\boxed{x \neq 1 \implies f(x) < x}; \quad f(1) = 1$$

⑧ 不能把 f' 严格递减写成 f'' 处处严格负

$$f(x) = x - (x - 1)^4$$

$$f'(x) = 1 - 4(x - 1)^3 \text{ 严格递减}$$

$$f''(x) = -12(x - 1)^2, \quad f''(1) = 0$$

第二分支只用一阶导数的严格次序，既不需要也不能擅加 $f'' < 0$ 。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 3 条题源

25 只有开区间可导：在内部闭区间应用中值定理

f 在 (a, b) 可导, $a < x_1 < x_2 < b$ 。

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

① 读题：只有开区间可导，外端点不可直接使用

f 在 (a, b) 可导, $a < x_1 < x_2 < b$

x_1, x_2 是原开区间的内点；它们可以组成一个新的闭区间。

$$[x_1, x_2] \subset (a, b)$$

② 拉格朗日的条件逐项对应

f 在 (a, b) 可导 $\implies f$ 在 (a, b) 连续

$\implies f$ 在 $[x_1, x_2]$ 连续

f 在 (x_1, x_2) 可导

新闭区间的两个端点，已经由原区间内部的可导性保证连续。

25 只有开区间可导：在内部闭区间应用中值定理 · 续

③ 直接应用，得到目标

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

$$\boxed{f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)}$$

这里根本没使用 $f(a)$ 、 $f(b)$ ，它们甚至可以没有定义。

④ 如果要改成罗尔，辅助函数怎样来

$$f'(\xi) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

↓ 常数导数对应一次项；再让左端归零

$$F(x) = f(x) - f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

25 只有开区间可导：在内部闭区间应用中值定理 · 续

⑤ 两个端点逐个代入

$$F(x_1) = f(x_1) - f(x_1) - 0 = 0$$

$$F(x_2) = f(x_2) - f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = 0$$

$x_2 - x_1 > 0$ ，分母合法。

⑥ 罗尔路线的收尾

F 在 $[x_1, x_2]$ 连续，在内部可导；两端为零。

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) : F'(\xi) = 0$$

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

这也解释了拉格朗日定理为何可以由罗尔定理推出来。

25 只有开区间可导：在内部闭区间应用中值定理 · 续

⑦ 把内部区间擅自放大到 $[a, b]$ 会出错

$$f(x) = 0 \ (0 < x < 1), \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 2$$

$$f'(x) = 0 \quad (0 < x < 1)$$

$$f(1) - f(0) = 1 \neq f'(\xi)(1 - 0) = 0$$

错误发生在外端点连续性缺失；不是中值定理本身失效。

⑧ 可直接执行的下一步

只给开区间可导 $\longrightarrow$ 先任取两个内点

$a < x_1 < x_2 < b$ $\longrightarrow$ 在 $[x_1, x_2]$ 上用定理

要把结果延伸到外端点，必须再证明或使用相应极限与端点连续性。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 2 条题源

26 函数零点与导数零点相乘：制造两个不同的二阶组合零点

f 在 $[0, 1]$ 二阶可导, $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = L < 0$ 为有限数。

$$\exists 0 < u < v < 1: \quad f(u)f''(u) + [f'(u)]^2 = f(v)f''(v) + [f'(v)]^2 = 0$$

① 读题：二阶组合里有乘积导数

$$\left(f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 \right)' = [f(x)f'(x)]'$$

$$[f(x)^2]' = 2f(x)f'(x)$$

可以直接把 ff' 设为辅助函数：目标是它的导数有两个不同零点。

② 极限条件先给端点零值与附近负号

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = L < 0$$

$$f(x) = x \frac{f(x)}{x} \rightarrow 0 \implies f(0) = 0$$

$$\exists \delta > 0: \quad 0 < x < \delta \implies \frac{f(x)}{x} < \frac{L}{2} < 0$$

$$f(x) < 0 \quad (0 < x < \delta)$$

第一步还用了 f 在端点连续；题设闭区间二阶可导足以保证。

26 函数零点与导数零点相乘：制造两个不同的二阶组合零点 · 续

③ 介值产生第二个函数零点

$$0 < d < \min(\delta, 1), \quad f(d) < 0 < f(1)$$

f 在 $[d, 1]$ 连续，介值定理给

$$\exists c \in (d, 1) : f(c) = 0$$

$$f(0) = f(c) = 0$$

④ 先对 f 用一次罗尔，制造一个导数零点

f 在 $[0, c]$ 连续、内部可导。

$$\exists \xi \in (0, c) : f'(\xi) = 0$$

$$\underbrace{f(0) = 0}_{\text{函数零点}}, \quad \underbrace{f'(\xi) = 0}_{\text{导数零点}}, \quad \underbrace{f(c) = 0}_{\text{函数零点}}$$

三处零点来自不同原因；相乘就能统一起来。

26 函数零点与导数零点相乘：制造两个不同的二阶组合零点 · 续

⑤ 辅助函数直接用乘积，少添一层字母

$$F(x) = f(x)f'(x)$$

$$F(0) = 0, \quad F(\xi) = 0, \quad F(c) = 0$$

$$F'(x) = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$$

闭区间二阶可导保证 F 在 $[0, c]$ 连续、内部可导；这时才可以继续使用罗尔。

⑥ 分别在两段用罗尔，确保两个不同的根

$$\exists u \in (0, \xi) : F'(u) = 0$$

$$\exists v \in (\xi, c) : F'(v) = 0$$

$$0 < u < \xi < v < c < 1$$

$$f(u)f''(u) + [f'(u)]^2 = 0$$

$$f(v)f''(v) + [f'(v)]^2 = 0$$

26 函数零点与导数零点相乘：制造两个不同的二阶组合零点 · 续

⑦ 平方函数入口与乘积入口等价

$$G(x) = f(x)^2 \implies G'(x) = 2F(x)$$

$$G''(x) = 2F'(x) = 2\{[f'(x)]^2 + f(x)f''(x)\}$$

若看见平方更容易联想，也可以走这条路：核心仍是让 G' 在 0 、 ξ 、 c 三点为零。

⑧ 次数、点与真正用到的条件

先对 f ：1 次罗尔； 再对 ff ：2 次罗尔

所以本题总共三次罗尔。后两次分区间调用，才能保证结果有两个不同根。

$$L < 0 \rightarrow \text{附近负值}; \quad f(1) > 0 \rightarrow \text{内部零点}; \quad f'' \text{ 存在} \rightarrow F' \text{ 存在}$$

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 2 条题源

27 积分平均值制造罗尔定理端点

$f \in C[0, 1]$ 且在 $(0, 1)$ 可导; $0 < a < b \leq 1$ 。

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(0), \quad 0 < a < b \leq 1$$

$$\implies \exists \xi \in (0, 1) : f'(\xi) = 0$$

① 读题：积分平均值等于一个已知函数值

$$\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(0) \right), \quad 0 < a < b \leq 1$$

目标： $f'(\xi) = 0$

↓ 倒推罗尔：先找与 0 等高的另一个点

$$f(t) = f(0), \quad t > 0$$

② 选积分中值，再选罗尔

f 连续 $\rightarrow$ 平均值介于最小值与最大值之间

$$\text{介值} \rightarrow f(t) = \text{平均值} \rightarrow f(t) = f(0)$$

本分支 $t \geq a > 0$ ，已经保证 $t \neq 0$ ；即使 $t=a$ 或 $t=b$ ，也不妨碍下一次罗尔。

27 积分平均值制造罗尔定理端点 · 续

③ 把积分中值的来由写出来

$$m = \min_{[a,b]} f, \quad M = \max_{[a,b]} f$$

$$m \leq f(x) \leq M \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M$$

连续函数取到 m 、 M ，并取到它们之间的值。

$$\exists t \in [a, b] : f(t) = f(0)$$

④ 完整收尾：在新的区间使用罗尔

$$0 < a \leq t \leq 1 \implies t > 0$$

f 在 $[0, t]$ 连续，在 $(0, t)$ 可导，且 $f(0)=f(t)$ 。

$$\exists \xi \in (0, t) \subset (0, 1) : \boxed{f'(\xi) = 0}$$

$$a = \frac{2}{3}, b = 1 : \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b f = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f$$

27 积分平均值制造罗尔定理端点 · 续

⑤ 端点就在积分区间上时：换变上限构造

另一常见条件： f 在 $[a, b]$ 连续、内部可导，平均值等于 $f(b)$ 。

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(b) \iff \int_a^b [f(t) - f(b)] dt = 0$$

$$F(x) = \int_a^x [f(t) - f(b)] dt$$

$$F(a) = F(b) = 0, \quad F'(x) = f(x) - f(b)$$

⑥ 两次罗尔：先找内点，再找导数零点

F 连续可导，第一次在 $[a, b]$ 用罗尔。

$$\exists \eta \in (a, b) : F'(\eta) = 0 \implies f(\eta) = f(b)$$

第二次对 f 在 $[\eta, b]$ 用罗尔。

$$\exists \xi \in (\eta, b) : f'(\xi) = 0$$

$$a < \eta < \xi < b$$

27 积分平均值制造罗尔定理端点 · 续

⑦ 为什么不能直接断言 $f(a)=f(b)$

$$f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x, \quad [0, 1]$$

$$\int_0^1 f = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} = f(1), \quad f(0) = 0 \neq f(1)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(1), \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

题设只把平均值与右端联系起来；另一等高点要通过上面的构造得到。

⑧ 相同外形下，必须确认两个点确实不同

$$f(x) = x : \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right), \quad f' \equiv 1$$

平均值等于内部某点值，不自动保证导数有零点。

积分区间外的已知点 $\rightarrow$ 点的位置分离； 积分端点 $\rightarrow$ 变上限积分造内点

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 9 条题源

28 零端点最大高度：两侧割线与严格积分界

$$f \in C^1[0, 2], f(0) = f(2) = 0, M = \max_{[0, 2]} |f|.$$

$$\exists \xi \in (0, 2) : |f'(\xi)| \geq M; \quad |f'| \leq M \implies M = 0$$

① 读题：两端为零，高度必须由斜率撑起来

$$\boxed{f(0) = f(2) = 0}, \quad M = \max_{[0, 2]} |f|$$

先证存在 $\xi : |f'(\xi)| \geq M$

再证若处处 $|f'| \leq M$ ，则 $M = 0$

第二问不是直接把 $\geq$ 与 $\leq$ 合起来就结束；等号情况需要继续排除。

② 零高度分支与非零高度分支

$$M = 0 \implies f \equiv 0 \implies f' \equiv 0$$

第一结论显然成立。下面设 $M > 0$ ；连续性保证最大绝对值取得。

$$\exists c \in (0, 2) : |f(c)| = M$$

端点函数值为零，不可能达到正高度 M 。

28 零端点最大高度：两侧割线与严格积分界 · 续

③ 两侧拉格朗日分别产生两条斜率

$$\exists \xi_1 \in (0, c) : |f'(\xi_1)| = \frac{|f(c)|}{c} = \frac{M}{c}$$

$$\exists \xi_2 \in (c, 2) : |f'(\xi_2)| = \frac{|f(2) - f(c)|}{2 - c} = \frac{M}{2 - c}$$

$f \in C^1[0, 2]$ ，两段均满足拉格朗日条件。

④ 为什么至少一条斜率不小于 M

$$c + (2 - c) = 2 \implies \min(c, 2 - c) \leq 1$$

$$\max\left(\frac{M}{c}, \frac{M}{2 - c}\right) = \frac{M}{\min(c, 2 - c)} \geq M$$

$$\boxed{\exists \xi \in (0, 2) : |f'(\xi)| \geq M}$$

28 零端点最大高度：两侧割线与严格积分界 · 续

⑤ 附上上界使最大高度只能在中点取得

$$|f'| \leq M \implies \frac{M}{c} \leq M, \quad \frac{M}{2-c} \leq M$$

↓ 本分支 $M > 0$, 可以除以 M

$$c \geq 1, \quad 2 - c \geq 1 \implies c = 1$$

$f(1) = M$ 或 $-M$, 因此 1 是 f 的局部极值点; 费马给

$$f'(1) = 0$$

⑥ 连续导数让中点附近的斜率严格偏小

$$f' \text{ 连续}, \quad f'(1) = 0, \quad M > 0$$

$$\exists \delta \in (0, 1) : |f'(x)| \leq \frac{M}{2} \quad (1 - \delta \leq x \leq 1)$$

其余区间仍用全局界 M ; 把积分拆成两段, 保留严格损失。

28 零端点最大高度：两侧割线与严格积分界 · 续

⑦ 积分估计产生严格矛盾

$$\begin{aligned} M &= |f(1) - f(0)| = \left| \int_0^1 f'(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f'(x)| dx \\ &\leq M(1 - \delta) + \frac{M}{2}\delta = M - \frac{M\delta}{2} < M \end{aligned}$$

$$\text{矛盾} \implies \boxed{M = 0, \quad f \equiv 0}$$

⑧ 为什么导数连续是这里的关键条件

这条第二问证明通过 $f'(1)=0$ 推出邻域上统一的小界，并用微积分基本定理积分 f' 。题设 C^1 保证这些步骤。

$$f(x) = \min(x, 2-x) : \quad \max |f| = 1$$

折线两侧斜率绝对值都是 1，但在中点不可导；它说明为什么尖顶的直觉不能直接当作满足题设的反例。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · [2 条题源](#)

29 积分中点不等式与二阶导数：双向证明

$f \in C^2(\mathbb{R})$ ；不等式须对任意 $a < b$ 成立， $c = \frac{a+b}{2}$ 。

$$f'' \geq 0 \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上} \iff \forall a < b: f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

① 读题：当且仅当，必须拆成两个方向

$$\boxed{f'' \geq 0} \iff \boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (\forall a < b)}$$

正向用切线下界；反向把任意小区间缩到一个点，用二阶项读取曲率。

② 正向：以中点作切线

$$c = \frac{a+b}{2}, \quad f'' \geq 0 \implies f' \text{ 不减}$$

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$$

该式可由拉格朗日分别检查 $x > c$ 、 $x < c$ 时的乘数符号得到；在 c 处为等号。

29 积分中点不等式与二阶导数：双向证明 · 续

③ 积分时，一次项为什么消失

$$\int_a^b (x - c) dx = \left[\frac{(x - c)^2}{2} \right]_a^b = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq (b - a)f(c) + f'(c) \cdot 0$$

$$f(c) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

④ 反向：为什么一定要“任意区间”

固定任意 c ，取对称小区间 $[c-h, c+h]$ ， $h>0$ 。

$$0 \leq \frac{1}{2h} \int_{c-h}^{c+h} f(x) dx - f(c)$$

$$x = c + t \implies 0 \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h [f(c + t) - f(c)] dt$$

若不等式只在某个固定区间成立，不能任意缩小到 c 。

29 积分中点不等式与二阶导数：双向证明 · 续

⑤ 局部泰勒与逐项积分

$$f(c+t) = f(c) + f'(c)t + \frac{1}{2}f''(c)t^2 + r(t), \quad r(t) = o(t^2)$$

$$\int_{-h}^h t \, dt = 0, \quad \int_{-h}^h t^2 \, dt = \frac{2h^3}{3}$$

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h [f(c+t) - f(c)] \, dt = \frac{f''(c)}{6} h^2 + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h r(t) \, dt$$

⑥ 余项积分为什么仍是 $o(h^2)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \quad |t| \leq \delta \implies |r(t)| \leq \varepsilon t^2$$

$$0 < h \leq \delta \implies \left| \frac{1}{2h} \int_{-h}^h r(t) \, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2h} \frac{2h^3}{3} = \frac{\varepsilon}{3} h^2$$

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h r(t) \, dt = o(h^2)$$

29 积分中点不等式与二阶导数：双向证明 · 续

⑦ 除以正数再取极限，读出曲率符号

$$0 \leq \frac{f''(c)}{6} h^2 + o(h^2)$$

$$0 \leq \frac{f''(c)}{6} + o(1) \quad (h \downarrow 0)$$

$$f''(c) \geq 0$$

c 任意，因此 f'' 在整个实数轴非负；两个方向都已证明。

⑧ 严格情形与常见误用

$$f'' > 0 \implies f(x) > f(c) + f'(c)(x - c) \quad (x \neq c)$$

$$\implies f(c) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

这里反向推理用局部 Peano 展开是合法的，因为 h 确实趋于零；不要把它与固定端点的全区间误差界混淆。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 4 条题源

30 积分大于弦下基准：内点极值与负二阶导

f 在 $[0, 1]$ 二阶可导, $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f = 1$ 。

$$\exists \xi \in (0, 1) : f'(\xi) = 0, \quad \exists \eta \in (0, 1) : f''(\eta) < -2$$

① 读题：积分面积等于 1，图像能否一直不超过 1？

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad \int_0^1 f(x) dx = 1$$

$$\text{目标一: } f'(\xi) = 0; \quad \text{目标二: } f''(\eta) < -2$$

第一问先找超过右端高度的内点；第二问根据 -2 反推一个二次比较函数。

② 严格面积矛盾：左端附近一定有缺口

反设 $f(x) \leq 1$ 。由 $f(0)=0$ 和连续性，存在 $\delta \in (0, 1)$ ，使

$$0 \leq x \leq \delta \implies f(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 f \leq \frac{\delta}{2} + (1 - \delta) = 1 - \frac{\delta}{2} < 1$$

与题设矛盾，因此某内点 c 满足 $f(c) > 1$ 。

30 积分大于弦下基准：内点极值与负二阶导 · 续

③ 第一问完整证明：最大点在内部

$$f(c) > 1 = \max\{f(0), f(1)\}$$

连续函数在 $[0, 1]$ 取最大值；最大点 ξ 不可能在两端。

$$\xi \in (0, 1) \xrightarrow{\text{费马}} \boxed{f'(\xi) = 0}$$

④ 第二问：为什么补的二次项是 $2x - x^2$

$$\text{想让 } F'' = f'' + 2, \quad F = f - P \implies P'' = -2$$

$$P(x) = -x^2 + Bx + C$$

$$P(0) = f(0) = 0 \implies C = 0$$

$$P(1) = f(1) = 1 \implies -1 + B = 1 \implies B = 2$$

$$F(x) = f(x) - (2x - x^2)$$

30 积分大于弦下基准：内点极值与负二阶导 · 续

⑤ 端点归零，积分迫使内部出现正值

$$F(0) = F(1) = 0$$

$$\int_0^1 F = 1 - \int_0^1 (2x - x^2) dx = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} > 0$$

$$\exists c \in (0, 1) : F(c) > 0$$

若全部内点 $F \leq 0$ ，则积分 ≤ 0 ，矛盾。这里 c 重新表示 F 的正值点。

⑥ 两侧拉格朗日产生一正一负的导数

$$\exists \xi_1 \in (0, c) : F'(\xi_1) = \frac{F(c)}{c} > 0$$

$$\exists \xi_2 \in (c, 1) : F'(\xi_2) = -\frac{F(c)}{1-c} < 0$$

F 连续可导；两个分母均为正。

30 积分大于弦下基准：内点极值与负二阶导 · 续

⑦ 再对 F' 用拉格朗日，得到严格负二阶导数

F' 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 连续、内部可导。

$$\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2) : F''(\eta) = \frac{F'(\xi_2) - F'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$$

$$F''(\eta) = f''(\eta) + 2 < 0 \implies \boxed{f''(\eta) < -2}$$

⑧ 为什么不用“最大点二阶导数非正”就结束

内点最大值通常只给 $F'' \leq 0$

题目要严格小于 -2 ；先找两边一正一负的一阶导数，再作差商，就能保留严格负号。

目标常数 $\rightarrow$ 补二次项 $\rightarrow$ 端点归零 $\rightarrow$ 面积给正值 $\rightarrow$ 两侧斜率

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · [2 条题源](#)

31 固定权重总量：单调函数的左右端区间界

f, g 在 $[a, b]$ 连续, $a < b$, f 单调不减, $0 \leq g \leq 1$; 用 $L = \int_a^b g(x) dx$ 表示权重总量。

$$\int_a^{a+L} f(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_{b-L}^b f(x) dx$$

① 读题：权重在 0 与 1 之间，总量固定

$$f \text{ 不减, } (0 \leq g \leq 1), \quad L = \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^{a+L} f \leq \int_a^b fg \leq \int_{b-L}^b f$$

保留原专题的 L 表示权重总量；先检验它确实能作为一段区间长度。

② 先保证两段端点真的位于原区间

$$0 \leq g \leq 1 \implies 0 \leq L \leq b - a$$

$$a \leq a + L \leq b, \quad a \leq b - L \leq b$$

若 $L=0$, 连续非负的 g 恒为零；若 $L=b-a$, 则 g 恒为 1, 两端界都取等号。以下也可统一按积分式处理。

31 固定权重总量：单调函数的左右端区间界 · 续

③ 选积分比较，不要强行用中值定理

f 只给连续、单调，不一定可导。把两边移成积分差，并减去分割点的固定高度。

$$c = a + L \implies \int_c^b g = L - \int_a^c g = \int_a^c (1 - g)$$

这条等量关系会消掉加减 $f(c)$ 所产生的常数项。

④ 下界：先分段，再加减 $f(c)$

$$\begin{aligned} \int_a^b fg - \int_a^c f &= \int_c^b fg - \int_a^c f(1 - g) \\ &= \int_c^b [f(x) - f(c)]g(x) dx \\ &\quad + \int_a^c [f(c) - f(x)](1 - g(x)) dx \\ &\quad + f(c) \left[\int_c^b g - \int_a^c (1 - g) \right] \end{aligned}$$

最后一行由第③步等于零。

31 固定权重总量：单调函数的左右端区间界 · 续

⑤ 下界：每个被积项的符号都明确

$$x \geq c: f(x) - f(c) \geq 0, \quad g(x) \geq 0$$

$$x \leq c: f(c) - f(x) \geq 0, \quad 1 - g(x) \geq 0$$

$$\int_a^b fg - \int_a^c f \geq 0$$

$$\boxed{\int_a^{a+L} f \leq \int_a^b fg}$$

⑥ 上界：改在右侧分割点对齐总量

$$d = b - L, \quad \int_d^b (1 - g) = L - \int_d^b g = \int_a^d g$$

$$\int_d^b f - \int_a^b fg = \int_d^b f(1 - g) - \int_a^d fg$$

$$= \int_d^b [f(x) - f(d)](1 - g(x)) dx$$

$$+ \int_a^d [f(d) - f(x)]g(x) dx$$

补出的常数项为 $f(d) [\int (1-g) - \int g]$ ，由第一行等于零。

31 固定权重总量：单调函数的左右端区间界 · 续

⑦ 上界与最终夹逼

$$x \geq d: f(x) - f(d) \geq 0; \quad x \leq d: f(d) - f(x) \geq 0$$

$$g \geq 0, \quad 1 - g \geq 0 \implies \int_d^b f - \int_a^b fg \geq 0$$

$$\boxed{\int_a^{a+L} f \leq \int_a^b fg \leq \int_{b-L}^b f}$$

⑧ 为什么不要要求 $f \geq 0$

证明只比较 $f(x) - f(c)$ 、 $f(x) - f(d)$ ，没有单独要求 f 的正负。

$$f(x) \mapsto f(x) + C$$

$$\int_a^b (f + C)g = \int_a^b fg + CL$$

$$\int_a^{a+L} (f + C) = \int_a^{a+L} f + CL$$

三边都增加同一个 CL ，说明这个界本来就不依赖绝对高度。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 2 条题源

32 累计积分次序：分部后权函数反转不等号

f, g 连续, $F(x) = \int_a^x (f - g) \geq 0, F(b) = 0$; $w \in C^1[a, b], w' \geq 0$ 。

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \leq \int_a^b w(x)g(x)dx$$

① 读题：比较的是累计积分，不是逐点大小

$$F(x) = \int_a^x [f(t) - g(t)] dt \geq 0, \quad F(b) = 0$$

$$w'(x) \geq 0, \quad \text{目标: } \int_a^b wf \leq \int_a^b wg$$

不能从累计差非负推出 $f \geq g$ ；应把 $f - g$ 写成 F' 。

② 移项后，辅助函数已由题干给出

$$\int_a^b wf \leq \int_a^b wg \iff \int_a^b w(f - g) \leq 0$$

$$F'(x) = f(x) - g(x)$$

$$\int_a^b w(f - g) = \int_a^b wF'$$

题设 f, g 连续，微积分基本定理保证这一替换。

32 累计积分次序：分部后权函数反转不等号 · 续

③ 为什么选分部积分

$$(wF)' = w'F + wF'$$

↓ 把 wF' 移出来，再在 $[a, b]$ 积分

$$\int_a^b wF' = [wF]_a^b - \int_a^b w'F$$

这样把导数从 F 移到 w ，正好接上题给 $w' \geq 0$ 与 $F \geq 0$ 。

④ 边界项逐个检查

$$F(a) = \int_a^a (f - g) = 0, \quad F(b) = 0$$

$$[wF]_a^b = w(b)F(b) - w(a)F(a) = 0$$

第一项来自题给总量相同，第二项来自同上下限积分；两项不能遗漏。

32 累计积分次序：分部后权函数反转不等号 · 续

⑤ 负号决定不等式反向

$$w'(x)F(x) \geq 0 \implies \int_a^b w'(x)F(x) dx \geq 0$$

$$\int_a^b w(f - g) = - \int_a^b w'F \leq 0$$

$$\boxed{\int_a^b w(x)f(x) dx \leq \int_a^b w(x)g(x) dx}$$

⑥ 具体权重 $w(x)=x$

$$w' = 1 \implies \int_a^b xf(x) dx - \int_a^b xg(x) dx = - \int_a^b F(x) dx$$

$$F \geq 0 \implies \int_a^b xf \leq \int_a^b xg$$

这个权重下还能完整讨论等号。

32 累计积分次序：分部后权函数反转不等号 · 续

⑦ 等号为什么会迫使 $f=g$

$$\int_a^b x f = \int_a^b x g \implies \int_a^b F = 0$$

F 连续非负；若某处 $F>0$ ，则邻域给严格正面积，矛盾。

$$F \equiv 0 \implies F' = f - g \equiv 0 \text{ 于 } (a, b)$$

f 、 g 连续，再把等式延伸到两个端点。

$$f \equiv g \text{ 于 } [a, b]$$

⑧ 一般权重的等号不能照搬

$$w(x) \equiv 1 \implies w' = 0$$

$$\int_a^b w f = \int_a^b w g \quad \text{只说明两者总积分相同}$$

这不强迫 $f=g$ 。第⑦步依赖 $w' \neq 0$ ；若 w' 有整段为零，那里仍可能存在非零累计差。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 1 条题源

33 三点共线：等斜率路线与减端点连线路线

1993 数三试卷Ⅳ·七：f 在 $[0, 1]$ 连续，在 $(0, 1)$ 二阶可导； $0 < c < 1$ ，三点 $(0, f(0)), (c, f(c)), (1, f(1))$ 共线。

$$\exists \xi \in (0, 1) : f''(\xi) = 0$$

① 读题：共线先翻成相同斜率

$$A(0, f(0)), C(c, f(c)), B(1, f(1)), \quad 0 < c < 1$$

$$\frac{f(c) - f(0)}{c} = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c}$$

目标 $f''(\xi) = 0$ ；先把两条斜率变成两个一阶导数值。

② 几何条件的另一种等价形式

$$(1 - c)[f(c) - f(0)] = c[f(1) - f(c)]$$

$$f(c) = (1 - c)f(0) + cf(1) = f(0) + c[f(1) - f(0)]$$

这一式说明中间点就在端点连线上，也为第二条构造路线准备了零点。

33 三点共线：等斜率路线与减端点连线路线 · 续

③ 先选两段拉格朗日

f 在 $[0, c]$ 、 $[c, 1]$ 连续，内部可导。

$$\exists \xi_1 \in (0, c) : f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c}$$

$$\exists \xi_2 \in (c, 1) : f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c}$$

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2), \quad \xi_1 < c < \xi_2$$

④ 再选罗尔，完成主线

f 二阶可导，故 f' 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 连续、内部可导。

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) : (f')'(\xi) = 0$$

$$\boxed{f''(\xi) = 0}, \quad \xi \in (0, 1)$$

33 三点共线：等斜率路线与减端点连线路线 · 续

⑤ 辅助函数路线：为什么减端点连线

$$\text{连线值} = f(0) + [f(1) - f(0)]x$$

$$F(x) = f(x) - f(0) - [f(1) - f(0)]x$$

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F(c) = 0$$

$$F''(x) = f''(x)$$

一次函数二阶导数为零；减它既造零点又不改变目标。

⑥ 完整替代证明：三次罗尔

$$[0, c] : \exists \xi_1 \in (0, c), F'(\xi_1) = 0$$

$$[c, 1] : \exists \xi_2 \in (c, 1), F'(\xi_2) = 0$$

F' 在两点之间连续可导，第三次罗尔给

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) : F''(\xi) = 0 \implies f''(\xi) = 0$$

33 三点共线：等斜率路线与减端点连线路线 · 续

⑦ ξ 不是题目中的 c ，也不必是中点

$$c = \frac{1}{3}, \quad f(x) = x(x - \frac{1}{3})(x - 1)$$

$$f(0) = f(\frac{1}{3}) = f(1) = 0$$

$$f''(x) = 6x - \frac{8}{3} = 0 \implies \xi = \frac{4}{9} \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$$

⑧ 两条路线的共同结构

$$\text{共线} \rightarrow \text{两段等斜率} \rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \rightarrow f''(\xi) = 0$$

$$\text{共线} \rightarrow \text{减直线造三零点} \rightarrow F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0 \rightarrow F''(\xi) = 0$$

选哪条都要交代中间两个点分处两段，以及第二层函数的连续可导条件。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 1 条题源

34 积分平均函数的单调性：分子构造与直接积分比较

1989 数三试卷Ⅳ·六：f 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 可导， $a < b$ 且 $f'(x) \leq 0$ 。对 $x \in (a, b)$ 定义 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 。

$$F'(x) \leq 0 \quad (a < x < b)$$

① 读题：带 x 的分母与变上限积分一起求导

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt, \quad f' \leq 0$$

这是 $[a, x]$ 上的平均值；目标是 $F' \leq 0$ 。F 是原题给的字母，后面只新增 G。

② 求导逐项展开

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x), \quad (x-a)' = 1$$

$$F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - \int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2}$$

$$(x-a)^2 > 0 \implies \text{只需证明分子非正}$$

34 积分平均函数的单调性：分子构造与直接积分比较 · 续

③ 辅助函数为什么选这个分子

$$G(x) = (x - a)f(x) - \int_a^x f(t) dt$$

$$G'(x) = f(x) + (x - a)f'(x) - f(x) = (x - a)f'(x) \leq 0$$

$$G(a) = 0 \cdot f(a) - \int_a^a f = 0$$

求导后两项 $f(x)$ 抵消，剩下的正是题给导数符号。

④ 完整主线：对 G 使用拉格朗日

固定任意 $x \in (a, b)$ 。 G 在 $[a, x]$ 连续、内部可导。

$$\exists \xi \in (a, x) : G(x) - G(a) = G'(\xi)(x - a)$$

$$G(x) = (\xi - a)f'(\xi)(x - a) \leq 0$$

$$F'(x) = \frac{G(x)}{(x - a)^2} \leq 0$$

34 积分平均函数的单调性：分子构造与直接积分比较 · 续

⑤ 另一条路线：从导数符号得到函数比较

对任意 $a \leq t < x$ ，用拉格朗日：

$$f(x) - f(t) = f'(\xi)(x - t) \leq 0, \quad t < \xi < x$$

$$f(t) \geq f(x) \quad (a \leq t \leq x)$$

$t=x$ 时是等号，因此比较覆盖整个积分区间。

⑥ 对 t 积分时， $f(x)$ 是常数

$$\int_a^x f(t) dt \geq \int_a^x f(x) dt = (x - a)f(x)$$

$$(x - a)f(x) - \int_a^x f(t) dt \leq 0$$

$$F'(x) = \frac{(x - a)f(x) - \int_a^x f(t) dt}{(x - a)^2} \leq 0$$

34 积分平均函数的单调性：分子构造与直接积分比较 · 续

⑦ 平均值表示可以比较，但不能把中值点当自变量

$$\exists \eta \in [a, x] : F(x) = f(\eta) \geq f(x)$$

$$F'(x) = \frac{f(x) - F(a)}{x - a} \leq 0$$

这里 F' 仍由原定义求得；不能从 $F(x)=f(\eta)$ 写 $F'(x)=f'(\eta)$ 。 η 会随 x 改变，定理也没保证它唯一或可导。

⑧ 用两个例子检查结论与边界

$$f(x) = C \implies F(x) = Cx, \quad F'(x) = C$$

$$f(x) = C - x \implies F(x) = Cx - \frac{x^2}{2}, \quad F'(x) = C - x \neq f'(\eta) = -1$$

所以只保证非正，不能擅自改成严格负。 $G(a)$ 有定义；原 $F(a)$ 没有定义，不应直接在 $[a, x]$ 上对原 F 套中值定理。

[打开题源对照](#)

► [对照原解析](#) · 1 条题源