

01 ① 读题：先圈出“一个乘积的导数”

第1题 / 1995 · 试卷V · 七 / 1—8页

题设：先检查能不能使用中值定理

$$f \in C[a, b], \quad f \text{ 在 } (a, b) \text{ 可导}, \quad a < b$$

证明：存在同一个中间点，使下式成立。

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = \underline{f(\xi) + \xi f'(\xi)}$$

$$\xi \in (a, b)$$

↓ 左边：两个端点的差，除以区间长度

$$bf(b) - af(a) = [xf(x)]_{x=b} - [xf(x)]_{x=a}$$

↓ 右边：一项不带导数，一项带 x

$$(xf(x))' = f(x) + xf'(x)$$

把左右两端认成同一个函数： $F(x) = xf(x)$

此处不是随意试函数；左右两边同时给出了它。

02 ② 选定理：目标长什么样？

第1题 / 先认结构，再核对条件

拉格朗日：端点差 ÷ 区间长度 = 某点导数

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi)$$

↓ 本题左右两边正好匹配，直接选它

罗尔：先要两个端点相等

$$G(a)=G(b)\implies G'(\xi)=0$$

也能做，但须再减去一条直线，把端点补齐。

柯西：两个函数的增量之比

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}$$

取 $g(x)=x$ 就退回拉格朗日，无须额外绕路。

泰勒：本题只给一阶可导

没有二阶条件；目标也不是高阶余项。

端点差/长度 → 拉格朗日

03 ③ 辅助函数：从右边倒着求原函数

第1题 / 每一项如何对上

$f(x)$ + $xf'(x)$

↓ 对照乘积求导的两项

$(uv)' = u'v + uv'$

$u = x, \quad u' = 1; \quad v = f(x), \quad v' = f'(x)$

$(xf(x))' = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)$

因此设 $F(x) = xf(x)$ ，再核对左边

$F(b) = bf(b), \quad F(a) = af(a)$

$F(b) - F(a) = bf(b) - af(a)$

↓ 右边匹配导数；左边匹配端点增量

$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi)$

只新增一个字母 F；不用再命名斜率或各个乘积。

04 ④ 完整证明：拉格朗日主线

第1题 / 可直接整理到答题卡

设函数，并写清正则性

$$F(x)=xf(x)$$

由题设，F 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导。

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)$$

在 $[a,b]$ 上使用拉格朗日中值定理

$$\exists \xi \in (a,b): F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$$

↓ 代回 F 的端点值与导数

$$bf(b)-af(a)=[f(\xi)+\xi f'(\xi)](b-a)$$

↓ $a<b$ ，所以 $b-a>0$ ；两边同除

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

同一个 ξ 来自对整个乘积使用一次中值定理。

05 ⑤ 换成罗尔：直线的系数怎么定？

第1题 / 先让端点相等，再得到导数为零

想得到的导数等式

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) - \frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = 0$$

↓ 减掉常数导数，就给原函数减去一次项

$$G(x) = xf(x) - Cx$$

C 不是猜的：要求 $G(a) = G(b)$

$$af(a) - Ca = bf(b) - Cb$$

↓ 移项，把 C 的项放在同一边

$$C(b - a) = bf(b) - af(a)$$

$$C = \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}$$

端点相等这条要求，直接确定了系数

无需强求两端都等于零；相等就够用罗尔。

06 ⑥ 完整证明：罗尔路线

第1题 / 与主线得到同一结论

$$C = \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}, \quad G(x) = xf(x) - Cx$$

G 在 [a, b] 连续，在 (a, b) 可导。

$$G(b) - G(a) = bf(b) - af(a) - C(b - a) = 0$$

↓ 端点相等，使用罗尔

$$\exists \xi \in (a, b): \quad G'(\xi) = 0$$

$$G'(x) = f(x) + xf'(x) - C$$

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) = C$$

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) = \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}$$

两条路线的关系

拉格朗日：直接比较斜率 $\longleftrightarrow$ 罗尔：先减去斜率项

本题主线选拉格朗日，是因为不用先求 C。

07 ⑦ 容易卡住：两个 ξ 不能随意合并

第1题 / 用一个例子看清错误在哪里

目标中的两个部分，必须在同一点计算

$$f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

分别使用中值定理，通常只会得到不同的中间点。

检验：取 $f(x)=x^2$ ，区间 $[0, 1]$

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1 = 2\xi \implies \xi = \frac{1}{2}$$

↓ 这是对 f 用拉格朗日得到的点

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq 1$$

对 $xf(x)=x^3$ 使用定理，才对应原目标

$$\frac{1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0)}{1 - 0} = 3\xi^2$$

$$1 = 3\xi^2 \implies \xi = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0, 1)$$

不是记住某个 ξ ；是让定理一次产生整个目标。

08 ⑧ 迁移：多一个 x ，应该怎样改？

第1题 / 把识别方法用到新结构

仍设 f 在闭区间连续、开区间可导

$$\underline{2xf(x)} + \underline{x^2f'(x)}$$

↓ 第一项的 $2x$ ，正是第二项 x^2 的导数

$$(x^2f(x))' = 2xf(x) + x^2f'(x)$$

设 $F(x) = x^2f(x)$ ，端点也一起改变

$$F(b) - F(a) = b^2f(b) - a^2f(a)$$

↓ 对 F 在 $[a, b]$ 用拉格朗日

$$\exists \xi \in (a, b): \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi)$$

$$\frac{b^2f(b) - a^2f(a)}{b - a} = 2\xi f(\xi) + \xi^2f'(\xi)$$

可迁移的是“同一乘积的导数”，不是死记 $xf(x)$

$$u'f + uf' \longrightarrow (uf)' \longrightarrow F = uf$$

09 ① 读题：共线为什么能通向二阶导数？

第2题 / 1993 • 试卷IV • 七 / 9—16页

f 在 $[0, 1]$ 连续，在 $(0, 1)$ 二阶可导。

$A(0, f(0)), C(c, f(c)), B(1, f(1)), 0 < c < 1$

已知 $A、C、B$ 三点共线

两段割线斜率相等 $\longrightarrow \underline{f'(\xi_1) = f'(\xi_2)}$

↓ 再对 f' 使用罗尔

$\exists \xi \in (0, 1): f''(\xi) = 0$

为什么分成两层？

f 的值 $\xrightarrow{\text{第一次求导}}$ f' 的值 $\xrightarrow{\text{再求导}}$ f''

共线先给斜率，斜率再给一阶导数相等。

题设没有 $f(0)=f(1)$ ，不能直接对 f 套罗尔。

10 ② 把几何条件全部翻译成式子

第2题 / 共线 $\rightarrow$ 斜率相等 $\rightarrow$ 线性组合

第一种翻译：左、右两段斜率相等

$$\frac{f(c) - f(0)}{c} = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c}$$

↓ $0 < c < 1$ ，两个分母都非零；交叉相乘

$$(1 - c)[f(c) - f(0)] = c[f(1) - f(c)]$$

$$(1 - c)f(c) - (1 - c)f(0) = cf(1) - cf(c)$$

↓ 把含 $f(c)$ 的项移到左边

$$f(c) = (1 - c)f(0) + cf(1)$$

第二种翻译：中间值落在端点连线上

$$f(c) = f(0) + c[f(1) - f(0)]$$

$$\frac{f(c) - f(0)}{c} = f(1) - f(0) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c}$$

斜率形式适合拉格朗日；减去连线适合罗尔。

11 ③ 选定理：先有“斜率”，再有“相等”

第2题 / 每一步根据当前结构选择

现在拿到的是两段割线斜率

$$\frac{f(c)-f(0)}{c}, \quad \frac{f(1)-f(c)}{1-c}$$

↓ 分别用拉格朗日，把斜率换成导数值

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$$

现在拿到两个点处的 f' 相等

↓ 把 f' 当作一个函数，用罗尔

$$f''(\xi)=0$$

点的位置也必须由定理保证

$$0 < \xi_1 < c < \xi_2 < 1, \quad \xi_1 < \xi < \xi_2$$

不需要 ξ 在 c 的哪一边；只须最终 $\xi \in (0, 1)$ 。

柯西没有新增帮助；泰勒需要额外组织余项

此处现成的等斜率，已经给出了最直接的两层路线。

12 ④ 第一层：两次拉格朗日分别在哪里用？

第2题 / 每次都保留自己的中间点

左半段 $[0, c]$

f 在 $[0, c]$ 连续，在 $(0, c)$ 可导。

$$\exists \xi_1 \in (0, c): f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c}$$

右半段 $[c, 1]$

f 在 $[c, 1]$ 连续，在 $(c, 1)$ 可导。

$$\exists \xi_2 \in (c, 1): f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c}$$

↓ 三点共线，使右边两个分式相等

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$$

$$\xi_1 < c < \xi_2 \implies \xi_1 < \xi_2$$

两个点一定不同，所以下一步有一个真正的区间。

13 ⑤ 第二层：为何可以对 f' 用罗尔？

第2题 / 正则性检查与完整收尾

题设“二阶可导”实际给了什么？

f'' 在 $(0,1)$ 存在 $\implies f'$ 在 $(0,1)$ 可导

↓ 可导必连续；两个新端点都在 $(0,1)$ 内

$f' \in C[\xi_1, \xi_2], \quad f' \text{ 在 } (\xi_1, \xi_2) \text{ 可导}$

第一层已经得到端点相等

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

↓ 对 f' 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 使用罗尔

$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2): (f')'(\xi) = 0$

$\xi \in (0,1), \quad f''(\xi) = 0$

整条主线

共线 $\rightarrow$ 两次拉格朗日 $\rightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \rightarrow$ 一次罗尔

14 ⑥ 辅助函数：为什么减去端点连线？

第2题 / 另一条路线，从“做出三个零点”出发

二阶导数为零 $\leftarrow$ 两个一阶零点 $\leftarrow$ 三个函数零点

$$F(0) = F(c) = F(1) = 0 \implies F''(\xi) = 0$$

三点共线：把这条直线减掉，三个点就都落在横轴。

端点连线先由斜率写出

$$\text{斜率} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$$

$$\text{直线值} = f(0) + [f(1) - f(0)]x$$

↓ 原函数减去它，定义辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(0) - [f(1) - f(0)]x$$

$$F(0) = 0, \quad F(1) = f(1) - f(0) - [f(1) - f(0)] = 0$$

$$F(c) = f(c) - f(0) - c[f(1) - f(0)] = 0$$

最后一个零点，正好用到了共线的代数形式。

15 ⑦ 完整证明：两层、三次罗尔

第2题 / “两层”不等于“只用两次”

$$F(x) = f(x) - f(0) - [f(1) - f(0)]x$$

F 在 $[0, 1]$ 连续，在 $(0, 1)$ 二阶可导；且有三个零点。

$$F(0) = F(c) = F(1) = 0$$

第一层：分别在两个区间使用罗尔

$$[0, c]: \exists \xi_1 \in (0, c), \quad F'(\xi_1) = 0$$

$$[c, 1]: \exists \xi_2 \in (c, 1), \quad F'(\xi_2) = 0$$

第二层： F' 在两点之间再用一次罗尔

F' 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 连续，在 (ξ_1, ξ_2) 可导。

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2): \quad F''(\xi) = 0$$

$$F'(x) = f'(x) - [f(1) - f(0)], \quad F''(x) = f''(x)$$

$$f''(\xi) = 0, \quad \xi \in (0, 1)$$

减去一次函数，不改变二阶导数；这也是选直线的原因。

16 ⑧ 检验： ξ 是不是共线的中间点 c ?

第2题 / 存在性结论不要擅自加强

取 $c=\frac{1}{3}$ ，构造三个零点

$$f(x)=x(x-\frac{1}{3})(x-1)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$$

$$f(0)=f(\frac{1}{3})=f(1)=0$$

↓ 三点在横轴上，满足共线条件

$$f'(x)=3x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$f''(x)=6x-\frac{8}{3}=0 \implies \xi=\frac{4}{9}$$

$$\xi=\frac{4}{9} \neq c=\frac{1}{3}, \quad \xi \neq \frac{1}{2}$$

也不能声称 ξ 唯一

$$f(x)=2x+1 \implies f''(x)=0 \quad (0 < x < 1)$$

此时任意内点都可以；定理保证“至少一个”。

读题联想：共线 $\rightarrow$ 等斜率，或减直线 $\rightarrow$ 三个零点

17 ① 读题：积分条件怎样变成罗尔条件？

第3题 / 1996 · 试卷V · 八 / 17—24页

f 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 可导， $a < b$ 。

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(b)$$

目标：存在 $\xi \in (a, b)$ ，使 $f'(\xi) = 0$

$$f'(\xi) = 0 \iff f(\eta) = f(b), \quad a < \eta < b$$

↓ 倒推罗尔：先找另一个点与右端点等高

积分平均值 $= f(b) \longrightarrow$ 寻找内点 η

难点不在最后一次罗尔，而在怎样得到 η

现有条件没有说 $f(a) = f(b)$ 。

$$\int_a^b [f(t) - f(b)] dt = 0$$

把“平均”移项成“积分为零”，是下一步的入口。

18 ② 选定理：为什么不能一上来就套？

第3题 / 先补足缺失的条件

罗尔直接作用于 f ？端点相等尚未得到

$$f(a) \stackrel{?}{=} f(b)$$

拉格朗日直接作用于 f ？只得到未知斜率

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

分子是否为零未知，无法立刻结束。

积分中值定理？方向正确，但留意内点

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(\eta) = f(b)$$

若只写 $\eta \in [a, b]$ ，可能仍是 b ；还需说明可取内点。

采用可直接保证内点的主线

$$\int_a^b (f - f(b)) = 0 \rightarrow F(a) = F(b) = 0 \rightarrow F'(\eta) = 0$$

$$f(\eta) = f(b) \rightarrow f'(\xi) = 0$$

两次罗尔分别解决“找等高点”和“找导数零点”。

19 ③ 移项：把常数也写进积分里

第3题 / 每一步都是等价变形

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(b)$$

↓ 两边乘以 $b-a$

$$\int_a^b f(t) dt = (b-a)f(b)$$

这里的 $f(b)$ 对积分变量 t 来说是常数

$$(b-a)f(b) = \int_a^b f(b) dt$$

↓ 移到左边，再合并同一区间的积分

$$\int_a^b f(t) dt - \int_a^b f(b) dt = 0$$

$$\int_a^b [f(t) - f(b)] dt = 0$$

这不是说被积函数处处为零

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \not\Rightarrow f(t) \equiv 0$$

我们只需要找到至少一个内点，使差值为零。

20 ④ 辅助函数：为什么换成变上限积分？

第3题 / 把一个积分等式变成两个端点值

想要导数里出现 $f(x) - f(b)$

$$F'(x) = f(x) - f(b)$$

↓ 逆用微积分基本定理

$$F(x) = \int_a^x [f(t) - f(b)] dt$$

x 是变动的上限； t 只在积分内部使用，避免重名。

为什么下限选 a ？端点自动出现

$$F(a) = \int_a^a [f(t) - f(b)] dt = 0$$

$$F(b) = \int_a^b [f(t) - f(b)] dt = 0$$

↓ 第一个零点来自同上下限；第二个来自题设

f 连续，所以 F 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 可导。

$$F'(x) = f(x) - f(b) \quad (a < x < b)$$

21 ⑤ 完整证明：两次罗尔不能混成一次

第3题 / 第一次得到函数值相等，第二次得到导数为零

$$F(x) = \int_a^x [f(t) - f(b)] dt$$

由题设和积分性质， F 连续、开区间可导， $F(a)=F(b)=0$ 。

第一次：对 F 在 $[a, b]$ 使用罗尔

$$\exists \eta \in (a, b): F'(\eta) = f(\eta) - f(b) = 0$$

$$f(\eta) = f(b), \quad \eta < b$$

第二次：对 f 在 $[\eta, b]$ 使用罗尔

f 在 $[\eta, b]$ 连续，在 (η, b) 可导，且两端函数值相等。

$$\exists \xi \in (\eta, b): f'(\xi) = 0$$

$$a < \eta < \xi < b \implies \xi \in (a, b)$$

最后保留题目所需结论

$$\exists \xi \in (a, b), f'(\xi) = 0$$

22 ⑥ 另一入口：怎样证明平均值能在内点取到？

第3题 / 不把“内点”藏在一句话里

反设所有内点都没有 $f(x)=f(b)$

连续性与介值定理 $\Rightarrow f(x)-f(b)$ 在整个开区间同号。

先看全为正；全为负时对差值取负即可

$$f(x) > f(b) \quad (a < x < b)$$

取一个内点 c ；连续性给出小区间 $[c-\delta, c+\delta] \subset (a, b)$ 。

$$f(t) - f(b) \geq \frac{f(c) - f(b)}{2} > 0 \quad (|t - c| \leq \delta)$$

整个闭区间的差值非负；小区间上还有严格正下界。

$$\int_a^b [f(t) - f(b)] dt \geq 2\delta \cdot \frac{f(c) - f(b)}{2} > 0$$

↓ 与积分等于零矛盾；负号情形同样矛盾

$$\exists \eta \in (a, b): f(\eta) = f(b)$$

再对 f 在 $[\eta, b]$ 用罗尔，得到 $f'(\xi) = 0$ 。

23 ⑦ 例子：平均等于右端，并不等于左端

第3题 / 用计算排除错误的“直接罗尔”

$$[a, b] = [0, 1], \quad f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} = f(1)$$

题设成立，但 $f(0) \neq f(1)$

↓ 寻找与右端点等高的另一个点

$$x^2 - \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3} \iff (3x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\eta = \frac{1}{3} \in (0, 1), \quad f(\eta) = f(1)$$

↓ 在 $[\frac{1}{3}, 1]$ 上，罗尔才有端点相等

$$f'(x) = 2x - \frac{4}{3} = 0 \implies \xi = \frac{2}{3}$$

$$0 < \eta = \frac{1}{3} < \xi = \frac{2}{3} < 1$$

24 ⑧ 条件敏感：为何“等于端点值”很关键？

第3题 / 相似表面下，结论可能完全不同

若把 $f(b)$ 改成某个内点值，会怎样？

$$f(x) = x, \quad [0, 1], \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = 1 \neq 0 \quad (0 < x < 1)$$

平均值在内点取到，不保证还存在另一个等高点。

原题的端点 b ，提供了第二个不同的点

$$\eta \in (a, b) \implies \eta \neq b$$

$$f(\eta) = f(b) \implies \text{在} [\eta, b] \text{上用罗尔}$$

再看一个相近条件：只有积分为零

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \implies \exists \eta \in (a, b), f(\eta) = 0$$

这只给一个函数零点；还不能直接推出导数零点。

$$f(x) = x - \frac{1}{2} : \int_0^1 f = 0, \quad f' \equiv 1$$

25 ① 读题：两个点、两个分母、一个指数

第4题 / 1998 • 六 / 25—32页

f 在 [a,b] 连续，在 (a,b) 可导，且 a<b。

$$f'(x) \neq 0 \quad (a < x < b)$$

证明存在 ξ 、 $\eta \in (a,b)$ ，使

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$$

三个圈画位置分别给出三条线索

$$b - a \longrightarrow \text{函数} x \text{的增量}$$

$$e^b - e^a \longrightarrow \text{函数} e^x \text{的增量}$$

$$e^{-\eta} = \frac{1}{e^{\eta}}, \quad (e^x)' = e^x$$

↓ 两个增量提示：分别用拉格朗日、柯西

题目允许两个中间点；不必把 ξ 与 η 强行合并。

26 ② 先拆目标：怎样制造一个共同分子？

第4题 / 这是寻找路线，不是先假定结论成立

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta} = \frac{e^b - e^a}{(b - a) e^{\eta}}$$

想让两个导数相除后得到右边

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} e^{\eta}$$

↓ 两式的共同分子是端点增量 $f(b) - f(a)$

$f(b) - f(a)$ 将在相除时约去

为什么优先尝试这两个式子？

第一式就是拉格朗日；第二式把指数增量与指数导数配对。

$$\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$$

接下来须分别证明两式，并证明可以约分

27 ③ 选定理：柯西的第二个函数从哪里来？

第4题 / 目标右边直接点名了 e^x

拉格朗日对应“除以 $b-a$ ”

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

柯西对应“两个函数的增量之比”

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

↓ 对照题目： $g(b)-g(a)=e^b-e^a$

$$g(x)=e^x \implies g'(\eta)=e^\eta>0$$

f 与指数函数都满足闭区间连续、开区间可导。

为何没有直接只用一次罗尔？

原式是导数之比；要用罗尔，须先做两个端点归零函数。

泰勒需要展开与余项，本题没有这种目标结构

两个增量的比 $\longrightarrow$ 柯西优先

28 ④ 第一条等式：拉格朗日也负责证明非零

第4题 / 约分前必须完成的一步

对 f 在 $[a, b]$ 使用拉格朗日

$$\exists \xi \in (a, b): f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

题设给 f' 在每个内点都非零

$$f'(\xi) \neq 0, \quad b - a > 0$$

↓ 两个非零因子的乘积非零

$$f(b) - f(a) \neq 0$$

也可以反证：若两个端点相等

$$f(a) = f(b) \xrightarrow{\text{罗尔}} \exists \xi \in (a, b), f'(\xi) = 0$$

这与题设矛盾。主线已有拉格朗日，无须再做一次。

非零条件的用途：保证目标的分母，以及稍后的约分。

29 ⑤ 第二条等式：先写柯西的交叉形式

第4题 / 避免未检查分母就写比值

对 $f(x)$ 与 e^x 在 $[a, b]$ 使用柯西

$$\exists \eta \in (a, b):$$

$$[f(b) - f(a)]e^\eta = (e^b - e^a)f'(\eta)$$

↓ 因为 $a < b$ ，指数严格递增

$$e^b - e^a > 0, \quad e^\eta > 0$$

↓ 两边除以非零的指数增量

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} e^\eta$$

把接下来需要的非零量列齐

$$b - a \neq 0, \quad e^b - e^a \neq 0, \quad f(b) - f(a) \neq 0$$

$$f'(\eta) \neq 0, \quad e^\eta \neq 0$$

ξ 来自拉格朗日， η 来自柯西；各自都在 (a, b) 。

30 ⑥ 完整收尾：两个式子怎样相除？

第4题 / 除法 → 乘倒数 → 约分 → 指数改写

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$f'(\eta)=\frac{[f(b)-f(a)]e^\eta}{e^b-e^a}$$

相除；上一页已证明所有分母非零

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\div\frac{[f(b)-f(a)]e^\eta}{e^b-e^a}$$

↓ 除以分数，改成乘以倒数

$$=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{e^b-e^a}{[f(b)-f(a)]e^\eta}$$

↓ 约去非零的 $f(b)-f(a)$

$$=\frac{e^b-e^a}{(b-a)e^\eta}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$$

得到题目所需的两个内点

$$\xi,\eta\in(a,b)$$

没有证明两点相同、不同或谁先谁后；结论也不要求。

31 ⑦ 辅助函数路线：端点归零怎样构造？

第4题 / 把两条中值定理都改写为罗尔

从 $f(x)-f(a)$ 出发：左端已经为零

$$\frac{x-a}{b-a} : a \mapsto 0, b \mapsto 1; \quad \frac{e^x - e^a}{e^b - e^a} : a \mapsto 0, b \mapsto 1$$

右端多出 $f(b)-f(a)$ ；用“端点差 $\times$ 归一化因子”抵消。

$$F(x) = f(x) - f(a) - [f(b) - f(a)] \frac{x-a}{b-a}$$

$$G(x) = f(x) - f(a) - [f(b) - f(a)] \frac{e^x - e^a}{e^b - e^a}$$

$$F(a) = F(b) = 0, \quad G(a) = G(b) = 0$$

两者都在闭区间连续、开区间可导；分别应用罗尔。

$$F'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$G'(\eta) = 0 \implies f'(\eta) = \frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} e^\eta$$

得到同样两式，按上一页的非零检查与相除步骤收尾。

32 ⑧ 迁移：指数换成平方，什么跟着变？

第4题 / 看懂“增量与导数”这对搭配

假设 $0 < a < b$ ，其余 f 的条件不变

$$g(x) = x^2: \quad g(b) - g(a) = b^2 - a^2, \quad g'(\eta) = 2\eta > 0$$

↓ 拉格朗日给第一式，柯西给第二式

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad f'(\eta) = \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} 2\eta$$

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{b^2 - a^2}{(b - a)2\eta} = \frac{a + b}{2\eta}$$

检验原题：若 $f(x) = x$ ，左边恒等于 1

$$1 = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta} \iff e^{\eta} = \frac{e^b - e^a}{b - a}$$

对指数函数使用拉格朗日，恰好保证这样的 η 存在。

不要只看“有分式”就套柯西

先认出两个函数的增量，再检查导数及分母是否可除。

33 ① 读题：平均值的导数怎样看符号？

第5题 / 1989 • 试卷IV • 六 / 33—40页

f 在 [a, b] 连续，在 (a, b) 可导，且 $f'(x) \leq 0$ 。

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$$

证明： $F'(x) \leq 0 \quad (a < x < b)$

先认结构：这是 [a, x] 上的积分平均值

$$x-a > 0 \quad \text{且} \quad \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

↓ 分母带 x；必须同时对分子、分母求导

$$F'(x) = \frac{(x-a)f(x) - \int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2}$$

分母恒正 → 问题转为判断分子非正

F 是题目原有字母；仅在需要时新增 G 表示这个分子。

34 ② 求导不跳步：商法则怎么展开？

第5题 / 固定一个 $a < x < b$ 来计算

先算分子与分母各自的导数

$$\left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x), \quad (x-a)' = 1$$

第一个等式由 f 连续和微积分基本定理保证。

商法则：分子导数 $\times$ 分母 - 分子 $\times$ 分母导数

$$F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - \left(\int_a^x f(t) dt\right) \cdot 1}{(x-a)^2}$$

↓ 去掉多余的乘 1，把判断符号的部分留下

$$F'(x) = \frac{(x-a)f(x) - \int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2}$$

$$(x-a)^2 > 0$$

$$F'(x) \leq 0 \iff (x-a)f(x) - \int_a^x f(t) dt \leq 0$$

此时还没用 $f' \leq 0$ ；下一步要让它真正进入式子。

35 ③ 选路线：把 $f' \leq 0$ 接到哪个式子上？

第5题 / 两个自然入口都从分子出发

入口一：分子再求一次导，出现 f'

$$\left[(x-a)f(x) - \int_a^x f(t) dt \right]' = (x-a)f'(x)$$

↓ 导数非正 + 左端值为零 → 用拉格朗日比较

入口二： $f' \leq 0$ 先变成函数不增

$$a \leq t \leq x \implies f(t) \geq f(x)$$

↓ 在 $[a, x]$ 积分 → 积分值不小于矩形面积

$$\int_a^x f(t) dt \geq (x-a)f(x)$$

为何这里不优先用罗尔或柯西？

目标是不等式；现成信息是导数的符号，没有端点相等。

柯西可用于某些比值，但本题求导后已是直接的符号问题。

下面先完整走“分子作 G ”的路线，再走积分比较。

36 ④ 辅助函数：为什么恰好把分子叫 G？

第5题 / 看见求导后抵消，而不是凭空另设

$$G(x) = (x - a)f(x) - \int_a^x f(t) dt$$

把乘积求导与积分求导分别展开

$$G'(x) = 1 \cdot f(x) + (x - a)f'(x) - f(x)$$

$$\underline{f(x)} + \underline{(x - a)f'(x)} - \underline{f(x)}$$

↓ 相同的 $f(x)$ 正负抵消

$$G'(x) = (x - a)f'(x) \leq 0$$

再看左端：两个部分都自动为零

$$G(a) = (a - a)f(a) - \int_a^a f(t) dt = 0$$

两个任务同时完成：端点可算，导数有符号

$$G(a) = 0, \quad G' \leq 0 \longrightarrow G(x) \leq 0$$

$G(a)$ 有定义；原来的 $F(a)$ 含 $\frac{0}{0}$ ，没有定义。

37 ⑤ 完整证明：拉格朗日怎样给出非正？

第5题 / 对 G 用定理，不能直接跨过 F 的未定义端点

$$G(x) = (x - a)f(x) - \int_a^x f(t) dt, \quad G(a) = 0$$

$$G'(x) = (x - a)f'(x) \leq 0 \quad (a < x < b)$$

任取一个 $x \in (a, b)$ ，在 $[a, x]$ 上使用拉格朗日

G 在 $[a, x]$ 连续，在 (a, x) 可导。

$$\exists \xi \in (a, x): \quad G(x) - G(a) = G'(\xi)(x - a)$$

$$G(x) = (\xi - a)f'(\xi)(x - a)$$

$$\xi - a > 0, \quad x - a > 0, \quad f'(\xi) \leq 0 \implies G(x) \leq 0$$

↓ 代回最初的求导式

$$F'(x) = \frac{G(x)}{(x - a)^2} \leq 0$$

x 任意，所以结论对整个 (a, b) 成立。

这里只需要导数存在；没有额外假设 f' 连续。

38 ⑥ 完整另一解：函数比较再积分

第5题 / 不新增辅助函数也能完成

固定 $x \in (a, b)$ ，任取 $a \leq t < x$

f 在 $[t, x]$ 连续、 (t, x) 可导；由拉格朗日，

$$\exists \xi \in (t, x): f(x) - f(t) = f'(\xi)(x - t) \leq 0$$

$$f(t) \geq f(x) \quad (a \leq t < x)$$

$t=x$ 时为等号，所以此不等式覆盖整个 $[a, x]$ 。

↓ 两边对 t 在 $[a, x]$ 上积分

$$\int_a^x f(t) dt \geq \int_a^x f(x) dt = (x - a)f(x)$$

↓ $f(x)$ 对 t 是常数；移项得到分子非正

$$(x - a)f(x) - \int_a^x f(t) dt \leq 0$$

$$F'(x) = \frac{(x - a)f(x) - \int_a^x f(t) dt}{(x - a)^2} \leq 0$$

39 ⑦ 平均值入口：能写 $F(x)=f(\eta)$ ，但别乱求导

第5题 / 中值点依赖 x ，不是固定的代入点

积分中值定理给出平均值的直观意义

$$\exists \eta \in [a, x]: F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt = f(\eta)$$

由 $f' \leq 0$ ， f 不增；且 $a \leq \eta \leq x$ 。

$$f(x) \leq f(\eta) = F(x) \leq f(a)$$

使用已经严格算出的 F' 公式

$$F'(x) = \frac{f(x) - \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt}{x-a}$$

$$F'(x) = \frac{f(x) - F(x)}{x-a} \leq 0$$

不能由 $F(x)=f(\eta)$ ，就写 $F'(x)=f'(\eta)$

η 随 x 改变；定理既没给出唯一的 $\eta(x)$ ，也没给可导性。

平均值表示 $\rightarrow$ 比较大小 求导仍用原定义

40 ⑧ 用例子检查：非正、端点和错误求导

第5题 / 结论的强弱必须与条件一致

例一：常函数 $f(x)=C$

$$F(x)=\frac{C(x-a)}{x-a}=C, \quad F'(x)=0$$

所以题目只能保证 ≤ 0 ，不能擅自改成 < 0 。

例二： $f(x)=C-x$

$$\int_a^x (C-t) dt = C(x-a) - \frac{x^2-a^2}{2}$$

$$F(x) = C - \frac{x+a}{2}, \quad F'(x) = -\frac{1}{2}$$

$$f'(\eta) = -1 \neq F'(x)$$

这直接说明“平均值表示后把 η 当 x 求导”会出错。

最终可带走的路线

平均函数 $\rightarrow$ 商法则 $\rightarrow$ 分子符号

每条路线都要回到原目标 $F' \leq 0$ ，才算证明完成。